

# 連続時間動学的一般均衡モデルに関する研究ノート<sup>\*†</sup>

蓮見 亮<sup>‡</sup>

2023年2月22日（初稿2020年12月23日）

武蔵大学経済学部ワーキング・ペーパー No.33 (J-25)

## 要旨

連続時間の平均場ゲームの枠組みを用いたヘテロジニアス・エージェントモデルには、理論上および計算上多くの利点がある。本稿では、それ以前より存在する連続時間最適化問題の解に関する議論について、それら新しい理論の知見も踏まえた整理を行った。離散時間の場合と同様、定常状態周りで線型化した線型方程式の係数行列の固有値を用いて定常状態の近傍での解の存在と一意性を調べる方法は、計算が簡単で有用である。連続時間最適化問題の数値解として、完全予見解を計算する方法と、定常状態でのハミルトン・ヤコビ・ベルマン方程式を差分近似を用いて解くことで方策関数を得る方法の2つを示した。外生変数が存在する場合などには、両者を組み合わせて用いることもできる。

---

\* 本研究は JSPS 科学研究費補助金（科研費）19K23232 の助成を受けています。

† 本稿の作成に用いた MATLAB プログラムは <https://github.com/rhasumi/optimalcontrol2020> にアップロードしてある。

‡ 武蔵大学経済学部，日本経済研究センター，連絡先：ryo.hasumi@u.musashi.ac.jp

# 1 序論

近年、平均場ゲーム (mean field game, Lasry and Lions [2007]) と呼ばれる理論モデルの枠組みが提案され、マクロ経済の分析にも応用できることが知られている (Achdou et al. [2017], Kaplan et al. [2018], Ahn et al. [2018]). 平均場ゲームは、ある環境を制約条件として、多数の主体が自らの利得関数に従って最適化行動をとるが、その全体の結果として環境も変化するという枠組みのモデルであり、特にその環境のことを平均場と呼ぶ。動学的一般均衡モデルとしては、例えば、いわゆる Bewley-Huggett-Aiyagari モデル (Bewley [1986], Huggett [1993], Aiyagari [1994]) のような、経済主体の異質性を考慮したヘテロジニアス・エージェントモデルがその定義に該当する。保有する資産や所得水準の異なる経済主体が多数し、その行動の全体がマクロ経済変数である実質金利などを変化させるモデルだからである。ただし、経済学の分野において、Bewley-Huggett-Aiyagari モデルをはじめとするヘテロジニアス・エージェントモデルの多くが離散時間モデルであるのに対し、Lasry and Lions [2007] の平均場ゲームは連続時間モデルである。

平均場ゲームは、後述するハミルトン・ヤコビ・ベルマン (HJB) 方程式と呼ばれる偏微分方程式と確率密度の保存を表す連続の式を対として用いる。例えば Aiyagari モデルを連続時間の枠組みで扱うことに様々な利点があることが Achdou et al. [2017] により示唆されている。具体的には理論的な明確さや、数値解析を用いた解法の容易さである。

動学的一般均衡モデルの最初の例が、いわゆるラムゼイモデル (Ramsey [1928], Cass [1965], Koopmans [1963]) であることはよく知られている。連続時間のモデルであり、変分法を用いて連続時間最適化問題の解が満たす常微分方程式が求められる。その後、コンピュータを用いた数値計算法が普及するのに対応して、線型化した離散時間最適化モデルの合理的期待均衡解が容易に計算できるようになり、実物的景気循環 (RBC) モデル (Kydland and Prescott [1982]), ニューケインジアン・モデル (よく引用されるのが Christiano et al. [2005] だが、それ以前にも多数ある) といった現代のマクロ経済学を方向付ける理論モデルが生み出された。並行して、計算可能な世代重複 (OLG) モデルとその完全予見解が Auerbach and Kotlikoff [1987] により提案され、現在でも主として社会保障に関連する分析に広く用いられている。通常、RBC モデル、ニューケインジアン・モデルや OLG モデルはいずれも離散時間で記述され、両者の枠組みや計算方法は共通する部分が多い。連続時間モデルと比較して数学的に扱いやすく、またコンピュータを用いた数値計算をする際に離散化の手間がないことが利点である。

連続時間で記述する平均場ゲームとしての動学的一般均衡モデルのうち、連続時間という部分は、古くて新しい問題ということになる。本稿では、平均場ゲームはこの序論で紹介するにとどめ、一部現代的な視点を入れて“古典的”連続時間動学的一般均衡モデルの理論上および計算上の整理を試みる\*<sup>1</sup>。HJB 方程式

$$\frac{\partial v(t, \hat{x}(t))}{\partial t} + \hat{H}(t, \hat{x}(t), \hat{y}(t), \mu(t)) = 0 \quad (135')$$

は古典論でも存在し、主として横断性条件の議論に用いられる。離散時間モデルではラグランジアンまたはベルマン方程式が用いられ、ハミルトニアンを用いることはまれだが、ベルマン方程式が

---

\*<sup>1</sup> 本稿での古典的、古典論という呼び方は、必ずしも一般的な呼び方ではないことに注意されたい。

連続時間では HJB 方程式に対応し兩者をつなぐものがハミルトニアンであることは、理論的整理の上で重要である。変分法を用いて導出される常微分方程式の解のうち、鞍点である不動点に収束する経路（軌跡、軌道）が連続時間最適化問題の解となるが、離散時間の場合と同様、不動点周りでの線型化方程式の固有値を調べることで解の存在と唯一性が確認できる（Sims [2002]）。線型化連続時間モデルに対しては、線型化離散時間モデルとほとんど同様に扱うことができる。元の非線型モデルの解の数値解法として、非線型の常微分方程式の鞍点である不動点に収束する経路の数値解法と偏微分方程式である HJB 方程式の数値解法を紹介する。

平均場ゲームにおいて経済主体に異質性をもたらすものは不確実性であり、数学的には確率変数がそれにあたる。平均場ゲームでは、個々の経済主体の状態は通常の遷移式  $\dot{x}(t) = g(t, x, y)$  に従って変化するが、全体でみた確率密度  $\varrho(t, x)$  は連続の式

$$\frac{\partial \varrho(t, x)}{\partial t} = -\text{div}(\varrho(t, x)g(t, x, y)) \quad (1)$$

に従って遷移する。“古典的”連続時間一般均衡モデルと平均場ゲームの間にその代表的主体版である連続時間動学的“確率的”一般均衡モデルが定義できるが\*2、ある程度の厳密さをもって議論するには古典論だけでもかなりの分量となるので、本稿ではこの場と結語を除いて確率論には言及しない。

本稿の構成は以下のとおりである。2 節では連続時間最適化問題の古典論を整理する。3 節では解の満たす微分方程式の理論的整理と数値解法について述べる。4 節では、“古典的”連続時間一般均衡モデルの例とその数値解法の例を紹介する。5 節は結語である。

## 2 連続時間最適化問題

### 2.1 連続時間最適化問題の例：ラムゼイモデル

マクロ経済を描写する連続時間一般均衡モデルとして最も基本的な連続時間のラムゼイモデル（Ramsey-Cass-Koopmans モデル）は、以下のような連続時間最適化問題として定式化できる：

$$\max_{c(t)} \int_0^{\infty} \exp(-\rho t) u(c(t)) dt \quad (2)$$

$$\text{subject to } \dot{k}(t) = \phi(k(t)) - \xi k(t) - c(t), \quad k(t) \geq 0. \quad (3)$$

(2) 式は通時的な効用関数、 $c(t)$  は消費、(3) 式は資本  $k(t)$  の蓄積過程である\*3。即時効用関数  $u$  と生産関数  $\phi$  を具体的に

$$u(c(t)) := \frac{c(t)^{1-\theta} - 1}{1-\theta} \quad (4)$$

$$\phi(k(t)) := k(t)^\alpha \quad (5)$$

とおく。天下り式であるが（4.1 項で導出する）、効用最大化の一階の必要条件は

$$\frac{\dot{c}(t)}{c(t)} = \theta^{-1}(\alpha k(t)^{\alpha-1} - \xi - \rho) \quad (6)$$

\*2 例えば Candler [2001] 参照。

\*3  $\dot{k}(t)$  は  $k(t)$  の時間微分  $\frac{dk}{dt}$ 。

である。この式は、オイラー方程式と呼ばれる。

ここで、(3) 式と (6) 式から消費  $c(t)$  と資本  $k(t)$  の不動点（脚注\*25 参照）を求めよう。これらが一定のとき  $\dot{c}(t) = \dot{k}(t) = 0$  であるから

$$k(t)^\alpha - \xi k(t) - c(t) = 0 \quad (7)$$

$$\theta^{-1}(\alpha k(t)^{\alpha-1} - \xi - \rho) = 0 \quad (8)$$

を  $c(t)$ ,  $k(t)$  について解けば

$$c^* = \left( \frac{\alpha}{\xi + \rho} \right)^{\frac{\alpha}{1-\alpha}} - \xi \left( \frac{\alpha}{\xi + \rho} \right)^{\frac{1}{1-\alpha}} \quad (9)$$

$$k^* = \left( \frac{\alpha}{\xi + \rho} \right)^{\frac{1}{1-\alpha}} \quad (10)$$

である。この不動点は、経済学的に定常状態という意味を持つが、3.2 項で改めて議論する。

オイラー方程式 (6) の導出には、次項で説明する変分法を用いる。まずは固定端を仮定する方が見通しがよいので、先に不動点（定常状態）を導出した。資本の蓄積過程 (3)、オイラー方程式 (6) にはそれぞれ資本と消費の時間微分が含まれるから、常微分方程式である。連続時間のラムゼイモデルはこれらの組み合わせであるから、常微分方程式系である。常微分方程式に関する一般的な事項を 3.1 項で説明する。

## 2.2 有限期間の最適化問題、変分法

有限期間の最適化問題（固定端）は、以下のように定式化できる：

$$\max_{x(t), y(t)} \int_0^T f(t, x(t), y(t)) dt \quad (11)$$

$$\text{subject to } \dot{x}(t) = g(t, x(t), y(t)) \quad (12)$$

$$x(t) \in \mathcal{X}, y(t) \in \mathcal{Y}, x(0) = x_0, x(T) = x_T. \quad (13)$$

(13) は、状態変数  $x(t)$ 、操作変数  $y(t)$  の値域にはそれぞれ  $x(t) \in \mathcal{X}$ ,  $y(t) \in \mathcal{Y}$  という制約をおき、状態変数の初期値と終端値を所与とするという意味である\*4。  $\mathcal{X}$ ,  $\mathcal{Y}$  は空でない凸集合で、実数値関数  $f$ ,  $g$  は微分可能とする。

制約条件 (12)(13) を満たす  $(x(t), y(t))$  を実行可能 (admissible) といい、実行可能な  $(x(t), y(t))$  に対し

$$W(x(t), y(t)) := \int_0^T f(t, x(t), y(t)) dt \quad (14)$$

と定義する。連続時間の最適化問題の解  $(\hat{x}(t), \hat{y}(t))$  とは、任意の実行可能な  $(x(t), y(t))$  に対し

$$W(\hat{x}(t), \hat{y}(t)) \geq W(x(t), y(t)) \quad (15)$$

であることをいう。解  $(\hat{x}(t), \hat{y}(t))$  が連続かつその値域が領域  $\mathcal{X} \times \mathcal{Y}$  の内部であるとき、変分法を用いて解  $(\hat{x}(t), \hat{y}(t))$  についての一階の必要条件（オイラー方程式）が導出できる。

\*4 操作変数 (control variable) はジャンプ変数とも呼ばれる。2.1 項の  $k(t)$  が状態変数  $x(t)$ ,  $c(t)$  が操作変数  $y(t)$  にあたる。

$W$  がラグランジュ乗数  $\lambda(t)$  を用いて

$$W(x(t), y(t)) = \int_0^T [f(t, x(t), y(t)) + \lambda(t)(g(t, x(t), y(t)) - \dot{x}(t))] dt \quad (16)$$

と書け、この積分  $W$  が解  $(\hat{x}(t), \hat{y}(t))$  に関して極値をとることを用いてオイラー方程式（オイラー・ラグランジュ方程式）を導出するのが変分法である\*5。 (16) 式右辺の被積分関数をラグランジアン

$$\mathcal{L}(t, x(t), \dot{x}(t), y(t), \lambda(t)) := f(t, x(t), y(t)) + \lambda(t)(g(t, x(t), y(t)) - \dot{x}(t)) \quad (17)$$

と呼ぶ。  $\hat{y}(t)$  に対して両端を固定して微小量ずらした経路  $y_\delta(t) = \hat{y}(t) + \delta y(t)$  を考える。実行可能性から対応する状態変数の経路  $x_\delta(t) = \hat{x}(t) + \delta x(t)$  と  $W$  の変分  $\delta W := W(x_\delta(t), y_\delta(t)) - W(x(t), y(t))$  が得られる。極値をとるとは、この変分

$$\delta W = \int_0^T [f(t, x_\delta(t), y_\delta(t)) - f(t, \hat{x}(t), \hat{y}(t)) + \lambda(t)(g(t, x_\delta(t), y_\delta(t)) - g(t, \hat{x}(t), \hat{y}(t))) - \lambda(t)(\dot{x}_\delta(t) - \dot{\hat{x}}(t))] dt \quad (18)$$

が任意の  $\delta y(t)$  に対してゼロになることをいう。被積分関数の第1項は、 $(\hat{x}(t), \hat{y}(t))$  の周りで1次のテイラー展開を用いると

$$\int_0^T [f(t, x_\delta(t), y_\delta(t)) - f(t, \hat{x}(t), \hat{y}(t))] dt = \int_0^T [f_x(t, \hat{x}(t), \hat{y}(t))\delta x(t) + f_y(t, \hat{x}(t), \hat{y}(t))\delta y(t)] dt. \quad (19)$$

同様に第2項は

$$\int_0^T \lambda(t)(g(t, x_\delta(t), y_\delta(t)) - f(t, \hat{x}(t), \hat{y}(t))) dt = \int_0^T \lambda(t)(g_x(t, \hat{x}(t), \hat{y}(t))\delta x(t) + g_y(t, \hat{x}(t), \hat{y}(t))\delta y(t)) dt. \quad (20)$$

さらに第3項に部分積分を適用すると

$$\begin{aligned} \int_0^T \lambda(t)(\dot{x}_\delta(t) - \dot{\hat{x}}(t)) dt &= \lambda(t)(x_\delta(t) - x(t)) \Big|_0^T - \int_0^T \dot{\lambda}(t)(x_\delta(t) - x(t)) dt \\ &= \lambda(T)(x_\delta(T) - x(T)) - \lambda(0)(x_\delta(0) - x(0)) - \int_0^T \dot{\lambda}(t)\delta x(t) dt \\ &= - \int_0^T \dot{\lambda}(t)\delta x(t) dt. \end{aligned} \quad (21)$$

併せると

$$\begin{aligned} \delta W &= \int_0^T (f_x(t, \hat{x}(t), \hat{y}(t)) + \lambda(t)g_x(t, \hat{x}(t), \hat{y}(t)) + \dot{\lambda}(t))\delta x(t) dt \\ &\quad + \int_0^T (f_y(t, \hat{x}(t), \hat{y}(t))) + \lambda(t)g_y(t, \hat{x}(t), \hat{y}(t))\delta y(t) dt. \end{aligned} \quad (22)$$

\*5  $W$  は後述の価値関数と同様、関数の関数になっているから汎関数である。変分法による一連の計算から、汎関数微分  $\delta W/\delta y$  がゼロになるための必要十分条件を求めている。ここで、汎関数が極値をとるための必要条件が汎関数微分がゼロとなることである。微分可能な関数がある点で極値をとるための必要条件が、微分がゼロとなることに対応している。変分法と汎関数微分については、例えば谷島 [2018] が詳しい。

$\delta y(t)$ ,  $\delta x(t)$  はまったくの任意だったから,  $\delta W = 0$  となるためには

$$\dot{\lambda}(t) + f_x(t, \hat{x}(t), \hat{y}(t)) + \lambda(t)g_x(t, \hat{x}(t), \hat{y}(t)) = 0 \quad (23)$$

$$f_y(t, \hat{x}(t), \hat{y}(t)) + \lambda(t)g_y(t, \hat{x}(t), \hat{y}(t)) = 0 \quad (24)$$

でなければならない\*6. これらは最適化の必要条件であり, オイラー方程式と呼ばれる\*7.

ラグランジアン  $\mathcal{L}(t, x(t), \dot{x}(t), y(t), \lambda(t))$  に  $\dot{x}(t)$  についてルジャンドル変換を施すことで得られる関数をハミルトニアンと呼ぶ\*8 :

$$H(t, x(t), y(t), \lambda(t)) := \mathcal{L}(t, x(t), \dot{x}(t), y(t), \lambda(t)) - \dot{x} \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial \dot{x}} = f(t, x(t), y(t)) + \lambda(t)g(t, x(t), y(t)). \quad (27)$$

ハミルトニアン  $H$  を用いると, (23) 式, (24) 式および制約条件 (12) は

$$H_x(t, x(t), y(t), \lambda(t)) = -\dot{\lambda}(t) \quad (28)$$

$$H_y(t, x(t), y(t), \lambda(t)) = 0 \quad (29)$$

$$H_\lambda(t, x(t), y(t), \lambda(t)) = \dot{x}(t) \quad (30)$$

と表せる. 以下では, (28) 式, (29) 式, (30) 式を併せてハミルトン方程式と呼ぶことにしよう\*9.

次に, 解の十分条件, つまり解の候補があったとして, どのような条件を満たせばそれが解であるかについて検討しよう\*10. 最適化問題 (11)(12)(13) において, ある  $(\hat{x}(t), \hat{y}(t))$  が連続かつ値域が領域  $\mathcal{X} \times \mathcal{Y}$  の内部で, (27) 式のようにハミルトニアンを定義するとハミルトン方程式 (28)(29)(30) を満たすとする. これを満たす  $((\hat{x}(t), \hat{y}(t))$  と対になる) ラグランジュ乗数  $\lambda(t)$  から最大化したハミルトニアン

$$M(t, x(t), \lambda(t)) := \max_{y \in \mathcal{Y}} H(t, x(t), y, \lambda(t)) \quad (31)$$

を定義する. 以下の論証から, もし  $\mathcal{X}$  が凸で  $M$  が  $x$  について凹関数であれば,  $(\hat{x}(t), \hat{y}(t))$  は  $W$  を最大化する.

$M$  が  $x$  について凹関数であることから,  $\hat{x}$  での 1 次のテイラー展開を考えれば

$$M(t, x(t), \lambda(t)) \leq M(t, \hat{x}(t), \lambda(t)) + M_x(t, \hat{x}(t), \lambda(t))(x - \hat{x}(t)) \quad (32)$$

---

\*6 固定端でない (つまり  $x(T) = x_T$  という制約がない) 場合,  $\delta W = 0$  となるためには (21) 式において

$$\lambda(T) = 0 \quad (25)$$

であることも必要条件に加わる. この (25) 式は有限期間の最適化問題の場合の横断性条件である.

\*7 (23) 式をラグランジアン  $\mathcal{L}$  を用いて表すと,

$$\frac{d}{dt} \left( \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial \dot{x}} \right) - \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial x} = 0 \quad (26)$$

である (オイラー・ラグランジュ方程式). 時間微分が含まれない  $y$  についての一階条件 (24) は単に  $\frac{\partial \mathcal{L}}{\partial y} = 0$  である.

\*8 この場合のルジャンドル変換は,  $H(t, x(t), y(t), \lambda(t)) := \max_{\dot{x}} \{\mathcal{L} - \dot{x}u\}$  とも表される.

\*9 単に最適化の必要条件と呼ばれることが多いかもしれないが, 十分性を論じる際に混乱を招かないよう, 解析力学での呼び方に倣うことにする.

\*10 Arrow の十分条件 (Arrow and Kruz [1970], Acemoglu [2009] Theorem 7.6).

で、両辺を  $[0, T]$  で積分し、 $M_x(t, \hat{x}, \lambda(t)) = -\dot{\lambda}(t)$  であることを用いれば\*11

$$\int_0^T M(t, x(t), \lambda(t))dt \leq \int_0^T M(t, \hat{x}(t), \lambda(t))dt - \int_0^T \dot{\lambda}(t)(x(t) - \hat{x}(t))dt \quad (33)$$

である。(14) 式と、ハミルトニアン の定義から

$$W(x(t), y(t)) + \int_0^T \lambda(t)g(t, x(t), y(t))dt = \int_0^T H(t, x(t), y(t), \lambda(t))dt \quad (34)$$

となるが、右辺に最大化したハミルトニアン (31) を代入すると

$$W(x(t), y(t)) + \int_0^T \lambda(t)g(t, x(t), y(t))dt \leq \int_0^T M(t, x(t), \lambda(t))dt \quad (35)$$

一方で、経路  $(\hat{x}(t), \hat{y}(t))$  に対しては等号が成立するから

$$W(\hat{x}(t), \hat{y}(t)) + \int_0^T \lambda(t)g(t, \hat{x}(t), \hat{y}(t))dt = \int_0^T M(t, \hat{x}(t), \lambda(t))dt. \quad (36)$$

さらに部分積分

$$\int_0^T \dot{\lambda}(t)x(t)dt = \lambda(t)x(t)\Big|_0^T - \int_0^T \lambda(t)\dot{x}(t)dt = \lambda(T)x_T - \lambda(0)x_0 - \int_0^T \lambda(t)\dot{x}(t)dt \quad (37)$$

を用いると

$$\int_0^T \dot{\lambda}(t)(x(t) - \hat{x}(t))dt = - \int_0^T \lambda(t)(\dot{x}(t) - \dot{\hat{x}}(t))dt. \quad (38)$$

これらを (33) 式と組み合わせると

$$W(x(t), y(t)) \leq W(\hat{x}(t), \hat{y}(t)) + \int_0^T \lambda(t)(\dot{x}(t) - \dot{\hat{x}}(t))dt - \int_0^T \lambda(t)(g(t, x(t), y(t)) - g(t, \hat{x}(t), \hat{y}(t)))dt \quad (39)$$

となるが、右辺第 2 項と第 3 項は制約条件 (13) からゼロとなることから

$$W(x(t), y(t)) \leq W(\hat{x}(t), \hat{y}(t)) \quad (40)$$

を得る。 $M$  が  $x$  について狭義凹であれば、この  $(\hat{x}(t), \hat{y}(t))$  は一意解である。狭義凹関数の場合には、等号なし不等号  $<$  になることから、一意性が従う\*12。

\*11 一般に  $\frac{\partial M}{\partial x} = H_x + \frac{\partial y}{\partial x}H_y$  であるが、包絡線定理と同様の理由で、最大化したハミルトニアンに対しては  $H_y = 0$ ,  $H_x = -\dot{\lambda}$  であることから ((29) 式, (28) 式も参照),  $M_x(t, \hat{x}, \lambda(t)) = -\dot{\lambda}(t)$  が従う。

\*12 このような古典的変分法ではなく、ポントリャーギンの最大値原理を用いれば、解  $(\hat{x}(t), \hat{y}(t))$  が内部という制約に代えて、 $\hat{y}(t)$  が区分的に連続であれば足りる。この場合には、 $(\hat{x}(t), \hat{y}(t))$  が解であることの十分条件は、全ての  $t \in [0, T]$  および任意の  $y(t) \in \mathcal{Y}$  に対して、ハミルトン方程式 (28)(29)(30) および

$$H(t, \hat{x}(t), \hat{y}(t), \hat{\lambda}(t)) \geq H(t, x(t), y(t), \hat{\lambda}(t)) \quad (41)$$

を満たすことである (ポントリャーギン [2009])。

## 2.3 無限期間の最適化問題, ハミルトン・ヤコビ・ベルマン方程式

次に, 以下のような連続時間の最適化問題を考える:

$$\max_{x(t), y(t)} \int_0^{\infty} f(t, x(t), y(t)) dt \quad (42)$$

$$\text{subject to } \dot{x}(t) = g(t, x(t), y(t)) \quad (43)$$

$$x(t) \in \mathcal{X}, y(t) \in \mathcal{Y}, x(0) = x_0, \lim_{t \rightarrow \infty} [b(t)x(t)] \geq x_1. \quad (44)$$

$f, g$  は微分可能とする. 固定端の場合の状態変数の終端値の制約に代えて,  $\lim_{t \rightarrow \infty} [b(t)x(t)] \geq x_1$  という形式の制約が解の十分条件の証明の仮定として必要であることが<sup>3</sup>, Acemoglu [2009] で強調されている<sup>\*13</sup>.

まず, 任意の  $t_0 \geq 0$  に対して価値関数

$$V(t_0, x(t_0)) := \sup_{(x(t), y(t)) \in \mathcal{X} \times \mathcal{Y}} \int_{t_0}^{\infty} f(t, x(t), y(t)) dt \quad (45)$$

を定義する. 解  $(\hat{x}(t), \hat{y}(t))$  の存在を仮定し, 価値関数 (45) 式に代入して以下のような形式的な計算をする<sup>\*14</sup>:

$$\begin{aligned} V(t_0, \hat{x}(t_0)) &= \int_{t_0}^{\infty} f(t, \hat{x}(t), \hat{y}(t)) dt \\ &= \int_{t_0}^{t_0 + \Delta t} f(t, \hat{x}(t), \hat{y}(t)) dt + \int_{t_0 + \Delta t}^{\infty} f(t, \hat{x}(t), \hat{y}(t)) dt \\ &= f(t_0, \hat{x}(t_0), \hat{y}(t_0)) \Delta t + o(\Delta t) + V(t_0 + \Delta t, \hat{x}(t_0 + \Delta t)) \\ \Leftrightarrow 0 &= f(t_0, \hat{x}(t_0), \hat{y}(t_0)) + \frac{o(\Delta t)}{\Delta t} + \frac{V(t_0 + \Delta t, \hat{x}(t_0 + \Delta t)) - V(t_0, \hat{x}(t_0))}{\Delta t}. \end{aligned} \quad (46)$$

$\Delta t \searrow 0$  の極限をとると

$$\begin{aligned} f(t_0, \hat{x}(t_0), \hat{y}(t_0)) + \frac{dV}{dt}(t_0, \hat{x}(t_0)) &= 0 \\ \Leftrightarrow f(t, \hat{x}(t), \hat{y}(t)) + \dot{\hat{x}}(t) \frac{\partial V(t_0, \hat{x}(t_0))}{\partial x} + \frac{\partial V(t_0, \hat{x}(t_0))}{\partial t} &= 0 \\ \Leftrightarrow f(t, \hat{x}(t), \hat{y}(t)) + g(t_0, \hat{x}(t_0), \hat{y}(t_0)) \frac{\partial V(t_0, \hat{x}(t_0))}{\partial x} + \frac{\partial V(t_0, \hat{x}(t_0))}{\partial t} &= 0 \end{aligned} \quad (47)$$

となるが, この (47) 式はハミルトン・ヤコビ・ベルマン (HJB) 方程式と呼ばれる<sup>\*15</sup>.

$(\hat{x}(t), \hat{y}(t))$  を解としよう. 任意の  $t \geq 0$  と  $x(t) \in \mathcal{X}$  について  $V(t, \hat{x}(t)) \geq V(t, x(t))$  であるが, 両端を解に一致するように固定して解からずれた経路  $y_{\delta}(t) = \hat{y}(t) + \delta y(t)$  を考える. 例えばある  $t_1 \geq 0$  から微小時間  $\Delta t$  の間だけずらすと

$$V(t_1, \hat{x}(t_1)) \geq \int_{t_1}^{t_1 + \Delta t} f(t, x_{\delta}(t), y_{\delta}(t)) dt + V(t_1 + \Delta t, x_{\delta}(t_1 + \Delta t)). \quad (48)$$

<sup>\*13</sup> 4.2 項のニューケインジアン・モデルに関する非ポジゲーム条件 (149) がその 1 つの具体例である. 脚注\*19 も参照.

<sup>\*14</sup>  $o(\cdot)$  はランダウの記号.

<sup>\*15</sup> 解析力学では, ハミルトン方程式から  $S$  を作用としてハミルトン・ヤコビ方程式  $\frac{\partial S}{\partial t} + H = 0$  が導出されるが (例えば須藤 [2019] 参照), HJB 方程式 (47) はこの  $S$  をちょうど価値関数  $V$  で置き換えた形式をしている.



(46) 式以下と同様の計算をすると

$$0 \geq f(t_1, x_\delta(t_1), y_\delta(t_1)) + g(t_1, x_\delta(t_1), y_\delta(t_1)) \frac{\partial V(t_1, \hat{x}(t_1))}{\partial x} + \frac{\partial V(t_1, \hat{x}(t_1))}{\partial t}. \quad (49)$$

HJB 方程式 (47) と併せるとともに,  $\lambda(t_1) := \frac{\partial V(t_1, \hat{x}(t_1))}{\partial x}$  とおくと

$$f(t, \hat{x}(t_1), \hat{y}(t_1)) + \lambda(t)g(t, \hat{x}(t_1), \hat{y}(t_1)) \geq f(t_1, x_\delta(t_1), y_\delta(t_1)) + \lambda(t_1)g(t_1, x_\delta(t_1), y_\delta(t_1)). \quad (50)$$

ハミルトニアン の定義 (27) を用いると

$$H(t, \hat{x}(t_1), \hat{y}(t_1), \lambda(t_1)) \geq H(t_1, x_\delta(t_1), y_\delta(t_1), \lambda(t_1)) \quad (51)$$

となるが, 時間  $t_1$  と変分  $\delta y(t)$  は任意なので

$$H(t, \hat{x}(t), \hat{y}(t), \lambda(t)) \geq \max_{y \in \mathcal{Y}} H(t, x(t), y, \lambda(t)) \quad (52)$$

が示せた.

ハミルトン方程式の 1 つ (28) は, 不等式 (52) より  $\hat{y}(t)$  で極値をとることから従う. もう 1 つ (29) は, HJB 方程式 (47) をハミルトニアンを用いて書くと

$$\frac{\partial V(t_0, \hat{x}(t_0))}{\partial t} + H(t, \hat{x}(t), \hat{y}(t), \lambda(t)) = 0 \quad (53)$$

となるが, この両辺を  $x$  で微分して  $\frac{\partial V(t_0, \hat{x}(t_0))}{\partial x \partial t} = \frac{\partial \lambda(t)}{\partial t} = \dot{\lambda}(t)$  であることを用いて得る. つまり有限期間・固定端の最適化問題の解と同様の一階の必要条件が求まる.

まとめると, 以下のとおりである. 最適化問題 (42)(43)(44) において, 解  $(\hat{x}(t), \hat{y}(t))$  が存在し, その解が連続かつ値域が領域  $\mathcal{X} \times \mathcal{Y}$  の内部であるとする. (27) 式のようにハミルトニアン定義すると, 解は不等式 (52) を満たす. その必要条件は, ハミルトン方程式 (28)(29)(30) を満たすことである. さらに, 価値関数 (45) を定義すると, 価値関数  $V$  は微分可能で, 解は HJB 方程式 (47) を満たす.

## 2.4 割引がある場合, 横断性条件

前項では, 最適化問題 (42)(43)(44) の解の必要条件を導出した. これを以下のような割引のある無限期間の最適化問題

$$\max_{x(t), y(t)} \int_0^\infty \exp(-\rho t) f(x(t), y(t)) dt \quad (54)$$

$$\text{subject to } \dot{x}(t) = g(t, x(t), y(t)) \quad (55)$$

$$x(t) \in \mathcal{X}, y(t) \in \mathcal{Y}, x(0) = x_0, \lim_{t \rightarrow \infty} [b(t)x(t)] \geq x_1 \quad (56)$$

に当てはめる.  $f$  は  $t$  にあらわに依存せず,  $\rho > 0$  とする. 定義しなおしたラグランジュ乗数  $\mu(t) := \exp(\rho t)\lambda(t)$  を用いて, 現在価値ハミルトニアンと呼ばれる以下の量

$$\begin{aligned} \hat{H}(t, x(t), y(t), \mu(t)) &:= \exp(\rho t)H(t, x(t), y(t), \lambda(t)) \\ &= f(x(t), y(t)) + \exp(\rho t)\lambda(t)g(t, x(t), y(t)) \\ &= f(x(t), y(t)) + \mu(t)g(t, x(t), y(t)) \end{aligned} \quad (57)$$

を定義する。これを用いてハミルトン方程式 (28)(29)(30) を表すと

$$\hat{H}_y(t, \hat{x}(t), \hat{y}(t), \mu(t)) = 0 \quad (58)$$

$$\hat{H}_x(t, \hat{x}(t), \hat{y}(t), \mu(t)) = \rho\mu(t) - \dot{\mu}(t) \quad (59)$$

$$\hat{H}_\mu(t, \hat{x}(t), \hat{y}(t), \mu(t)) = \dot{x} \quad (60)$$

である。HJB 方程式 (47) は

$$\frac{\partial V(t, \hat{x}(t))}{\partial t} + \exp(-\rho t) \hat{H}(t, \hat{x}(t), \hat{y}(t), \mu(t)) = 0 \quad (61)$$

となる。

次に、解の十分条件、つまり解の候補があったとして、どのような条件を満たせばそれが解であるかについて検討しよう。恣意的ではあるが、もし、解  $(\hat{x}(t), \hat{y}(t))$  が

$$\lim_{t \rightarrow \infty} H(t, \hat{x}(t), \hat{y}(t), \lambda(t)) = \lim_{t \rightarrow \infty} \left[ \exp(-\rho t) \hat{H}(t, \hat{x}(t), \hat{y}(t), \mu(t)) \right] = 0 \quad (62)$$

を満たしたとしよう。(62) 式は横断性条件と呼ばれる。このとき価値関数  $V$  が存在し、 $t$  で偏微分可能であれば、(62) 式は

$$\lim_{t \rightarrow \infty} \frac{\partial V(t, \hat{x}(t))}{\partial t} = 0 \quad (63)$$

と同値である。さらに、横断性条件 (62) は現在価値ハミルトニアンの定義 (57) から

$$\lim_{t \rightarrow \infty} \left[ \exp(-\rho t) \hat{H}(t, \hat{x}(t), \hat{y}(t), \mu(t)) \right] = \lim_{t \rightarrow \infty} \left[ \exp(-\rho t) f(t, x(t), y(t)) + \exp(-\rho t) \mu(t) g(t, x(t), y(t)) \right] = 0 \quad (64)$$

となるところ、もし価値関数の極限  $\lim_{t \rightarrow \infty} V(t, \hat{x}(t))$  が存在し有限であれば、 $V(t, \hat{x}(t)) = \int_t^\infty \exp(-\rho s) f(\hat{x}(s), \hat{y}(s)) ds$  であることから

$$\lim_{t \rightarrow \infty} \left[ \exp(-\rho t) f(\hat{x}(t), \hat{y}(t)) \right] = 0 \quad (65)$$

であり、これと (64) 式を併せれば

$$\lim_{t \rightarrow \infty} \left[ \exp(-\rho t) \mu(t) \dot{x}(t) \right] = 0 \quad (66)$$

となるが、もし  $\lim_{t \rightarrow \infty} \hat{x}(t) = x^*$  または  $\lim_{t \rightarrow \infty} [\dot{x}(t)/\hat{x}(t)] = \chi$  ならば

$$\lim_{t \rightarrow \infty} \left[ \exp(-\rho t) \mu(t) \hat{x}(t) \right] = 0 \quad (67)$$

が横断性条件となる<sup>\*16\*17</sup>。(67) 式を強横断性条件と呼ぶことにする。

前段落で価値関数の極限が現れたので、最適化問題 (42)(43)(44) との関係を整理する。経済学の最適化問題として考えたとき、仮に解を代入した価値関数が発散するとすれば、資源制約がないか、必ず破産するような場合であるから、通常興味の対象とはならない。したがって、価値関数の

<sup>\*16</sup> この完全な証明は Acemoglu [2009] にある (Theorem 7.13)。ただし、同書で強調されていることだが、解の候補の十分性の検証の際に解の候補に対して強横断性条件 (67) が成り立つことを直接示せばよいので、実用上、厳密な導出に関心を払う必要はない。

<sup>\*17</sup>  $\lambda(t) = \exp(-\rho t) \mu(t)$  であることから、有限期間の最適化問題の場合の横断性条件  $\lambda(T) = 0$  (脚注\*6 参照) は、(66) 式または (67) 式と対応関係にあることがわかる。

極限  $\lim_{t \rightarrow \infty} V(t, \hat{x}(t))$  が存在し有限である，という条件は，最適化問題 (42)(43)(44) を定義する上での強い制約とはならない．(63) 式の価値関数の時間による偏微分の極限がゼロである，は極限で価値関数が存在すれば定数であることを意味し，こちらの方が強い条件である．これが成り立つ最適化問題は，例えば，充分大きな  $t$  に対して関数  $g$  が  $t$  に依存しない時間同質的となる問題（どこから問題を解いても解になる）であるから，同じく強い制約とはならない．

解の十分条件について，横断性条件以外の点は 2.2 項後段の十分性に関する論証に沿って考える\*18．最適化問題 (42)(43)(44) において，ある  $(\hat{x}(t), \hat{y}(t))$  が連続かつ値域が領域  $\mathcal{X} \times \mathcal{Y}$  の内部で，現在価値ハミルトニアン (57) を定義すると，ハミルトン方程式 (58)(59) を満たすとする．これを満たす  $((\hat{x}(t), \hat{y}(t))$  と対になる) ラグランジュ乗数  $\mu(t)$  から最大化したハミルトニアン  $M(t, x(t))$  を定義する．さらに， $(\hat{x}(t), \hat{y}(t))$  は強横断性条件 (67) を満たし，さらに任意の実行可能な  $(x(t), y(t))$  に対し不等式

$$\lim_{t \rightarrow \infty} [\exp(-\rho t) \mu(t) x(t)] \geq 0 \quad (68)$$

が成り立つとする\*19．もし  $\mathcal{X}$  が凸で  $M$  が  $x$  について凹関数であれば， $(\hat{x}(t), \hat{y}(t))$  は  $W(x(t), y(t)) := \int_0^\infty \exp(-\rho t) f(t, x(t), y(t)) dt$  を最大化することが，2.2 項後段の論考をなぞれば示せる．異なるのは，以下の部分積分 (69) で強横断性条件 (67) を用いることである：

$$\begin{aligned} \int_0^\infty \dot{\lambda}(t)(x(t) - \hat{x}(t)) dt &= \lambda(t)(x(t) - \hat{x}(t)) \Big|_0^\infty - \int_0^\infty \lambda(t)(\dot{x}(t) - \dot{\hat{x}}(t)) dt \\ &= \lim_{t \rightarrow \infty} [\exp(-\rho t) \mu(t)(x(t) - \hat{x}(t))] - \int_0^\infty \lambda(t)(\dot{x}(t) - \dot{\hat{x}}(t)) dt. \end{aligned} \quad (69)$$

強横断性条件 (67) と不等式 (68) の仮定より

$$\int_0^T \dot{\lambda}(t)(x(t) - \hat{x}(t)) dt \geq - \int_0^T \lambda(t)(\dot{x}(t) - \dot{\hat{x}}(t)) dt \quad (70)$$

したがって

$$W(x(t), y(t)) \leq W(\hat{x}(t), \hat{y}(t)) \quad (71)$$

を得る．もし  $M$  が  $x$  について狭義凹であれば，この  $(\hat{x}(t), \hat{y}(t))$  は一意解である．

これまで， $x, y$  が 1 次元であるとしてきたが，ベクトル値関数である場合にも，同様の議論が成り立つ．状態変数が  $x(t) = (x_1(t), x_2(t), \dots, x_{n_x}(t))$ ，操作変数が  $y(t) = (y_1(t), y_2(t), \dots, y_{n_y}(t))$  のとき，現在価値ハミルトニアンは

$$\hat{H}(t, x(t), y(t), \mu(t)) := f(x(t), y(t)) + \sum_{i=1}^{n_x} \mu_i(t) g_i(t, x(t), y(t)) \quad (72)$$

であり，ハミルトン方程式 (58)(59)(60) は

$$\hat{H}_{y_j}(t, \hat{x}(t), \hat{y}(t), \mu(t)) = 0, \quad j = 1, 2, \dots, n_y \quad (73)$$

$$\hat{H}_{x_i}(t, \hat{x}(t), \hat{y}(t), \mu(t)) = \rho \mu_i(t) - \dot{\mu}_i(t), \quad i = 1, 2, \dots, n_x \quad (74)$$

$$\hat{H}_{\mu_i}(t, \hat{x}(t), \hat{y}(t), \mu(t)) = \dot{x}_i, \quad i = 1, 2, \dots, n_x \quad (75)$$

\*18 Acemoglu [2009], Theorem 7.14.

\*19 不等式 (68) が成り立つことを示すのに，(44) 式の形式の制約が必要になる．

となる。

以上をまとめると、連続時間最適化問題に対しては、1) 必要条件であるハミルトン方程式から解の候補を導出する、2) 解の候補が一連の解の十分条件を満たすこと、したがって価値関数を最大化することを確認する、という2ステップで解を特定する。例えば常微分方程式の初期値問題（以下の3.1項参照）では、解の存在が証明されており、かつ解の一意性のための必要十分条件が明らかになっているが、連続時間最適化問題では解の必要条件と十分条件を別個に議論する点で論理構成に差異がある\*20。理論上、解の十分条件を満たす解の候補が見つからない連続時間最適化問題に対しても解が存在する可能性は常にあるが、実用上、そのような連続時間最適化問題は興味の対象外におかれる。どのような場合に横断性条件が解の必要条件となるかの議論もなされているが（上東 [2002] 参照）、線引きは容易ではない。

### 3 微分方程式

#### 3.1 常微分方程式系，鞍点

ハミルトン方程式は常微分方程式系を構成し、最適化問題の解  $(\hat{x}(t), \hat{y}(t))$  および対応するラグランジュ乗数  $\lambda(t)$  または  $\mu(t)$  は、この常微分方程式系を満たし、常微分方程式系の解である。正規型常微分方程式系とは、ベクトル値関数  $f : D \rightarrow R^n$ ,  $D \subset R^{n+1}$  に対し

$$\frac{dx}{dt} = f(t, x), \quad (t, x) \in D \quad (76)$$

の形式の方程式をいう。成分ごとに書き出せば

$$\frac{dx_i}{dt} = f_i(t, x_1, x_2, \dots, x_n), \quad i = 1, 2, \dots, n \quad (77)$$

である。この定義から明らかなように、単独の常微分方程式と常微分方程式系を区別する必要性に乏しく、また本稿では正規型のみを取り扱うため、以下単に常微分方程式とする。ある区間  $I$  上で定義された  $R^n$  値関数  $x(t) = (x_1(t), x_2(t), \dots, x_n(t))$  は、全ての  $t \in I$  に対して  $(t, x(t)) \in D$  で、微分可能であり、各  $t \in I$  に対して (76) 式が成り立つとき、常微分方程式 (76) の解という。

#### 【微分方程式の解法の例（ベルヌーイの方程式）】

2.1 項のラムゼイモデルにおいて、資本  $k(t)$  の上限は、(3) 式の消費  $c(t)$  をゼロとおいた微分方程式

$$\frac{dk}{dt} = k(t)^\alpha - \xi k(t) \quad (78)$$

の解の極限である。  $u(t) := k(t)^{1-\alpha}$  とおいて整理すると

$$\frac{1}{1-\alpha} \frac{du}{dt} + \xi u(t) = 1 \quad (79)$$

\*20 連続時間最適化問題に対しても、一定の条件を課すことで、解の存在が証明できる（Acemoglu [2009], Theorem 7.15）。

となるが, 同次型  $\frac{1}{1-\alpha} \frac{du}{dt} + \xi u = 0$  の一般解 (脚注\*23 参照)  $u(t) = C \exp(-\xi(1-\alpha)t)$  を  $u(t) := C(t) \exp(-\xi(1-\alpha)t)$  として (79) に代入すると (定数変化法)

$$\begin{aligned} \frac{dC}{dt} &= (1-\alpha) \exp(\xi(1-\alpha)t) \\ \Leftrightarrow C(t) &= \xi^{-1} \exp(\xi(1-\alpha)t) + \tilde{C} \end{aligned} \quad (80)$$

したがって

$$k(t) = \left[ \xi^{-1} + \tilde{C} \exp(-\xi(1-\alpha)t) \right]^{\frac{1}{1-\alpha}} \quad (81)$$

であるが,  $t \rightarrow \infty$  の極限をとると

$$\sup k = \xi^{\frac{1}{\alpha-1}} \quad (82)$$

である\*21.

常微分方程式 (76) とその解のある点における値 (初期値と呼ぶ)

$$x(t_0) = x_0 \quad (83)$$

を対にした問題を常微分方程式の初期値問題という. 常微分方程式の初期値問題 (76)(83) には, その局所解の存在と解の唯一性に関する定理が知られている\*22.  $D \subset \mathbb{R}^{n+1}$  を開集合, 関数  $f: D \rightarrow \mathbb{R}^n$ ,  $D$  は連続,  $(t, x) \in D$  とすれば, 初期値問題 (76)(83) は, ある充分小さな正数  $\delta$  に対して,  $I := [t_0 - \delta, t_0 + \delta]$  で定義された局所解  $x(t)$  をもつ.

$r > 0$ ,  $R > 0$ ,  $t_0 \in \mathbb{R}$ ,  $x_0 \in \mathbb{R}^n$ ,  $D\{(t, x) \in \mathbb{R} \times \mathbb{R}^n; |t - t_0| \leq r, \|x - x_0\| \leq R\}$  とおく. ベクトル値関数  $f: D \rightarrow \mathbb{R}^n$  がリプシッツ条件: ある定数  $L$  に対して,  $(t, x) \in D$ ,  $(t, y) \in D$  のとき

$$\|f(t, x) - f(t, y)\| \leq L \|x - y\| \quad (84)$$

を満たすとする. ここでベクトル  $u = (u_1, u_2, \dots, u_n)$  に対して  $\|u\|$  はそのユークリッドノルム

$$\|u\| := \sqrt{u_1^2 + u_2^2 + \dots + u_n^2} \quad (85)$$

である. このとき, 初期値問題 (76)(83) の局所解  $x(t)$  は唯一つ存在する.

$f$  が時間  $t$  に依存しない微分方程式

$$\frac{dx}{dt} = f(x) \quad (86)$$

を自律系という. 正方行列  $A$  を係数行列とする定数係数線型常微分方程式

$$\frac{dx}{dt} = Ax \quad (87)$$

も自律系であり, その一般解は行列の指数関数  $\exp(A) := \sum_{k=0}^{\infty} \frac{1}{k!} A^k$  を用いると

$$x(t) = \exp(tA)C \quad (88)$$

\*21 資本  $k(t)$  の上限は, (78) 式の特異点  $(k(t)^\alpha - \xi k = 0$  を満たす点) として直接求めることもできる (脚注\*25 も参照).

\*22 例えば高橋 [1988] 定理 I.2 参照.

である。ただし、 $C$  は任意定数 ( $x$  と同じ次元のベクトル) である\*23。初期値問題  $x(0) = x_0$  の解は

$$x(t) = \exp(tA)x_0 \quad (89)$$

与えられる。ちょうど、任意定数を初期値で決定していることになる。 $\exp(tA)$  を線型常微分方程式 (87) の定める相流 (解の流れ) という。

2次元の場合の線型常微分方程式 (87) の初期値問題の解

$$\begin{bmatrix} x(t) \\ y(t) \end{bmatrix} = \exp(tA) \begin{bmatrix} x_0 \\ y_0 \end{bmatrix} \quad (90)$$

を初期値を任意として平面に描くことを考える。 $A' = PAP^{-1}$  と書ける行列に対しては、 $\exp(tA') = P \exp(tA) P^{-1}$  が成り立つので、 $\begin{bmatrix} x'(t) \\ y'(t) \end{bmatrix} = \exp(tA') \begin{bmatrix} x'_0 \\ y'_0 \end{bmatrix}$  が線型変換  $\begin{bmatrix} x'(t) \\ y'(t) \end{bmatrix} = P \begin{bmatrix} x(t) \\ y(t) \end{bmatrix}$  から得られる。 $A$  は  $A'$  のジョルダン標準形だから\*24、 $A$  が

$$\begin{bmatrix} \lambda_1 & 0 \\ 0 & \lambda_2 \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} \lambda & 1 \\ 0 & \lambda \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} \alpha + i\beta & 0 \\ 0 & \alpha - i\beta \end{bmatrix} \quad (91)$$

のいずれかの場合を調べれば充分である ( $\lambda_1, \lambda_2, \lambda, \alpha, \beta \in \mathbb{R}$ )。固有値が実数で対角化できる第1の類型で 1)  $\lambda_1 < 0 < \lambda_2$  の場合、2)  $\lambda_1 < \lambda_2 < 0$  の場合について、解の経路を描いたもの (相図と呼ばれる) が図 3.1 である。いずれも原点は不動点であるが、1) の場合は鞍点、2) の場合は安定結節点と呼ばれる\*25。

3次元以上の線型常微分方程式の解についても、平面への射影を考えることで解の経路を描くことができる。一般の自律系の常微分方程式 (86) の場合にも、不動点  $x^*$  が存在する場合、その点での  $f(x)$  のヤコビ行列  $A := \left. \frac{\partial f(x)}{\partial x} \right|_{x=x^*}$  を用いて定義した線型方程式

$$\frac{dw}{dt} = Aw(t), \quad w(t) := x(t) - x^* \quad (92)$$

は元の微分方程式の近似となる。この線型化方程式の解の経路から、元の常微分方程式の不動点の近傍での解の経路の概容を調べることができる。

#### 【SIR モデル (不動点が安定結節点の例)】

感染症の拡大を描写するモデルとして以下のような SIR モデルが知られている：

$$\dot{S}(t) = -\beta S(t)I(t) \quad (93)$$

$$\dot{I}(t) = \beta S(t)I(t) - \nu I(t) \quad (94)$$

$$\dot{R}(t) = \nu I(t). \quad (95)$$

\*23 任意定数を含む微分方程式の解を一般解という。すぐ確認できるように、(88) 式は (87) 式を満たす。

\*24 ジョルダン標準形については、例えば齊藤 [1966] 参照。

\*25 自律系微分方程式 (86) において  $f(x) = 0$  となる点を特異点といい、この点は相流の不動点である (例えば谷島 [2018] 参照)。

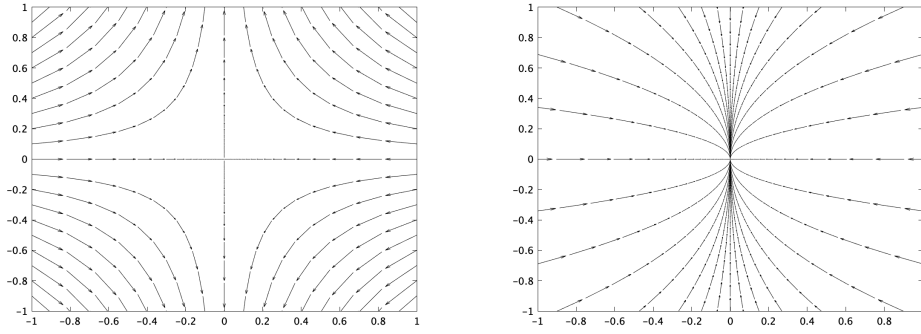


図1 相図：左1) 原点が鞍点，右2) 原点が安定結節点 (phase.m)

注：パラメータは，左図では  $\lambda_1 = -1, \lambda_2 = 1$ ，右図では  $\lambda_1 = -0.5, \lambda_2 = -1$ 。

ここで， $S$  は感受性保持者 (Susceptible)， $I$  は感染者 (Infected)， $R$  は免疫保持者 (Recovered) であり， $S(0), I(0), R(0)$  を所与とし， $S(t) + I(t) + R(t) \equiv 1$  とする． $R(t)$  は残差なので，以下，(93) 式と (94) 式からなる微分方程式の数値解を求める．

解を求める期間を  $t \in [0, T]$ ，時間間隔を  $\Delta t := T/N$  とし， $t_n := n\Delta t$  とおく．一般に，1 次のテイラー展開から

$$x(t_n + \Delta t) = x(t_n) + \dot{x}(t_n)\Delta t + o(\Delta t) \quad (96)$$

なので

$$\dot{x}(t_n) \simeq \frac{x(t_{n+1}) - x(t_n)}{\Delta t} \quad (97)$$

と近似できる． $x_n := x(t_n)$  とおけば， $\dot{x}(t) = f(x(t))$  は

$$\frac{x_{n+1} - x_n}{\Delta t} = f(t_n, x_n) \quad (98)$$

$$\Leftrightarrow x_{n+1} = x_n + f(t_n, x_n)\Delta t \quad (99)$$

と書ける．この形式の近似法を前進オイラー法という．(93) 式，(94) 式にこの近似を用いれば，(99) 式の右辺が  $x_n$  だけに依存しているから，陽解法 (単純な繰り返し計算) により数値解を得ることができる\*26．計算結果の例を図2に示す．

### 3.2 合理的期待均衡解

$f, g$  が時間  $t$  に依存しない割引のある無限期間の最適化問題 ( $x, y$  は1次元とする)

$$\max_{x(t), y(t)} \int_0^{\infty} \exp(-\rho t) f(x(t), y(t)) dt \quad (100)$$

$$\text{subject to } \dot{x}(t) = g(x(t), y(t)) \quad (101)$$

$$x(t) \in \mathcal{X}, y(t) \in \mathcal{Y}, x(0) = x_0, \lim_{t \rightarrow \infty} [b(t)x(t)] \geq x_1 \quad (102)$$

\*26 これが良い近似になるかは，関数  $f$  の形状および  $\Delta t$  のとり方に依存する．より精度の高い近似については，例えば Petter Langtangen and Linge [2017] 5.2.4 項を参照．

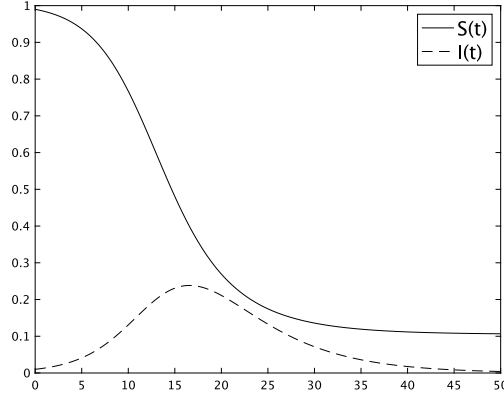


図2 SIRモデルの数値解 (sir.m)

注：初期値・パラメータは， $I(1) = 0.01$ ， $S(0) = 0.99$ ， $\beta = 0.5$ ， $\nu = 0.2$ 。

の解  $(\hat{x}(t), \hat{y}(t))$  および対応するラグランジュ乗数  $\mu(t)$  は，ハミルトン方程式 (58)(59)(60) を満たす。このとき，このハミルトン方程式は自律系常微分方程式である。以下，ラグランジュ乗数  $\mu(t)$  を代入により消去した常微分方程式

$$\dot{x}(t) = g(x(t), y(t)) \quad (103)$$

$$\dot{y}(t) = h(x(t), y(t)) \quad (104)$$

およびその解  $(\hat{x}(t), \hat{y}(t))$  について考える。まず，連立方程式  $0 = g(x, y) = h(x, y)$  を解くことで，不動点  $(x^*, y^*)$  が求まる。その不動点周りでの線型化方程式

$$\dot{w}(t) = \Gamma w(t) \quad (105)$$

を用いることで，解  $w(t) := (\hat{x}(t) - x^*, \hat{y}(t) - y^*)$  の経路を議論する。線型常微分方程式 (105) の一般解は

$$w(t) = \exp(\Gamma t)C \quad (106)$$

で与えられる。状態変数の初期値  $x_0$  を所与として，操作変数の初期値  $y(0)$  が与えられれば任意定数  $C = w(0)$  が定まるが，それをどう得るのか，および相流を決める  $\Gamma$  の固有値がどの型に当てはまるのかが論点である。よく知られている通り，原点が鞍点になり，かつその原点に向かう経路が境界値問題の解になることが以下の離散時間に関する Blanchard and Kahn [1980] に沿った論考から示される。

係数行列が  $\Gamma = Q^{-1}\Lambda Q$  と対角化可能であるとき

$$Qw(t) = \exp(\Lambda t)Qw_0 \quad (107)$$

である。ここで， $\Lambda := \text{diag}(\lambda_1, \lambda_2)$  であり，まず  $\lambda_1 < 0 < \lambda_2$  を仮定してみる。原点が鞍点になる類型である。 $z(t) = [z_s(t) \ z_u(t)]^\top := Qw(t)$  と定義すると

$$\begin{bmatrix} z_s(t) \\ z_u(t) \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \exp(\lambda_1 t) & 0 \\ 0 & \exp(\lambda_2 t) \end{bmatrix} \begin{bmatrix} z_s(0) \\ z_u(0) \end{bmatrix} \quad (108)$$



となるが、 $\lim_{t \rightarrow \infty} z_u(t)$  が発散しないためには、 $z_u(t) \equiv 0$  でなければならない。 $Q = [Q_{11} \ Q_{12}; Q_{21} \ Q_{22}]$ ,  $w(t) = [w_s(t) \ w_u(t)]^\top$  と分割すれば

$$Q_{21}w_s(t) + Q_{22}w_u(t) = 0 \quad (109)$$

したがって、全ての  $t$  について  $w_u(t) = -Q_{22}^{-1}Q_{21}w_s(t)$  でなければならない。この係数  $P := -Q_{22}^{-1}Q_{21}$  は動的計画法での方策関数 (policy function) である。(108) 式の上段については

$$\begin{aligned} Q_{11}w_s(t) + Q_{12}w_u(t) &= \exp(\lambda_1 t)(Q_{11}w_{s,0} + Q_{12}w_{u,0}) \\ \Leftrightarrow (Q_{11} + Q_{12}P)w_s(t) &= \exp(\lambda_1 t)(Q_{11} + Q_{12}P)w_{s,0} \end{aligned} \quad (110)$$

と計算できるが、初期値  $w_{s,0} := x_0 - x^*$  が所与なので

$$w_s(t) = (Q_{11} + Q_{12}P)^{-1} \exp(\lambda_1 t)(Q_{11} + Q_{12}P)w_{s,0} \quad (111)$$

$$w_u(t) = Pw_s(t) \quad (112)$$

と解けたことになる<sup>\*27</sup>。ここで、 $\lambda_1 < 0$  より

$$\lim_{t \rightarrow \infty} w_s(t) = \lim_{t \rightarrow \infty} w_u(t) = 0 \quad (113)$$

したがって、不動点が定常状態

$$x^* = \lim_{t \rightarrow \infty} \hat{x}(t), \quad y^* = \lim_{t \rightarrow \infty} \hat{y}(t) \quad (114)$$

である<sup>\*28</sup>。 $\lambda_1 \leq \lambda_2 \leq 1$  の場合は、 $y(0)$  が任意となるので複数解が存在する (いわゆる indeterminacy)。 $1 < \lambda_1 \leq \lambda_2$  の場合は解なしである。 $\lambda_1 = 1 < \lambda_2$  の場合は、点としての定常状態が定まらないが、唯一解が存在する。

$w(t)$  が 3 次元以上の場合、 $\dot{w}(t)$  の係数が単位行列でない場合、係数行列が対角化できない場合、外生変数 (外生ショック) が存在する場合の一般については、Sims [2002] で議論されている<sup>\*29</sup>。一般に、無限期間の最適化問題の解が満たす常微分方程式は以下のように表現できる：

$$\Gamma_1 \dot{w}(t) = \Gamma_0 w(t) + \Psi \varepsilon(t) + \Pi \eta(t). \quad (115)$$

ここで、 $\varepsilon(t)$  は外生変数であり、 $\eta(t) := \lim_{\Delta t \searrow 0} \frac{y(t+\Delta t) - E_t[y(t+\Delta t)]}{\Delta t}$  は予測誤差である。操作変数の時間微分  $\dot{y}(t)$  についてのみ存在する。

$A, B$  を QZ 分解すると ( $Q, Z$  はユニタリ,  $\Lambda, \Omega$  は上三角)

$$Q^\top \Lambda Z^\top \dot{x}(t) = Q^\top \Omega Z^\top x(t) + C \varepsilon(t) + D \eta(t) \quad (116)$$

だが、左から  $Z$  を掛けて  $z(t) = [z_{s,t} \ z_{u,t}]^\top := Z^\top x(t)$  とおくと

$$\begin{bmatrix} \Lambda_{11} & \Lambda_{12} \\ 0 & \Lambda_{22} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \dot{z}_s(t) \\ \dot{z}_u(t) \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \Omega_{11} & \Omega_{12} \\ 0 & \Omega_{22} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} z_s(t) \\ z_u(t) \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} Q_1 \\ Q_2 \end{bmatrix} C \varepsilon(t) + \begin{bmatrix} Q_1 \\ Q_2 \end{bmatrix} D \eta(t) \quad (117)$$

<sup>\*27</sup>  $w(t)$  の経路は、(106) 式の任意定数  $C$  を  $[w_{s,0} \ Pw_{s,0}]^\top$  とおくことによっても求まる。

<sup>\*28</sup> 微分方程式 (86) の不動点  $x^*$  は、対応する線型化方程式に対して原点が鞍点であれば、鞍点であるから、非線型化前の元の微分方程式の不動点 (定常状態) も鞍点である (高橋 [1988], 定理 III.3.2)。

<sup>\*29</sup> 離散時間については広く知られているが、連続時間についても論文中で触れられており、プログラムも存在する (gensysct.m)。

のように分割できる。ただし、 $\Lambda_{22}^{-1}\Omega_{22}$  の固有値の絶対値が 0 超になるように選ぶ。  $z_u(t)$  が発散しないための必要条件は

$$z_u(t) \equiv 0 \quad (118)$$

$$Q_2 C \varepsilon(t) + Q_2 D \eta(t) \equiv 0 \quad (119)$$

である。ここで、2 番目の式について、解が存在するならば

$$\text{span}(Q_2 C) \subset \text{span}(Q_2 D) \quad (120)$$

つまり  $Q_2 C$  と  $Q_2 D$  を線型写像と考えたとき、 $Q_2 D$  の値域が  $Q_2 C$  の値域を含んでいなければならない。経済主体の期待が合理的であれば、各時点の外生変数  $\varepsilon(t)$  に応じて予測誤差をゼロにすることができるかと仮定できるからである。

さらに、 $Q_1 D \eta(t)$  が  $Q_2 D \eta(t)$  によって表される、つまり、 $Q_2 D$  を  $Q_1 D$  に写す写像

$$Q_1 D = \Phi Q_2 D \quad (121)$$

となる行列  $\Phi$  が存在し一意であるとき、かつその時に限り、唯一の解が存在する。行列  $\Phi$  の存在は、期待の合理性による。一意性は、それが成り立たないとき、複数の方策関数が存在することになることから従う。 $Q_1 D \eta(t) = \Phi Q_2 D \eta(t) = -\Phi Q_2 C \varepsilon(t)$  を (117) 式の上段に代入すると

$$\Lambda_{11} \dot{z}_s(t) = \Omega_{11} z_s(t) + (Q_1 - \Phi Q_2) C \varepsilon(t) \quad (122)$$

したがって、 $Z = [Z_1 \ Z_2]$  として

$$\begin{aligned} Z^\top \dot{w}(t) &= \begin{bmatrix} \Lambda_{11}^{-1} \Omega_{11} & 0 \\ 0 & 0 \end{bmatrix} Z^\top w(t) + \begin{bmatrix} \Lambda_{11}^{-1} (Q_1 - \Phi Q_2) C \\ 0 \end{bmatrix} \varepsilon(t) \\ \Leftrightarrow \dot{w}(t) &= Z_1 \Lambda_{11}^{-1} \Omega_{11} Z_1^\top w(t) + Z_1 \Lambda_{11}^{-1} (Q_1 - \Phi Q_2) C \varepsilon(t) \end{aligned} \quad (123)$$

つまり

$$\dot{w}(t) = \Theta_1 w(t) + \Theta_0 \varepsilon(t) \quad (124)$$

と表せたことになる。経済主体の期待の合理性を用いて導出される解であることから、合理的期待均衡解と呼べる。このアルゴリズムを用いて、連続時間動学的一般均衡モデルのインパルス応答を描くことができる。その具体例は、4.2 項および 4.3 項で紹介する

### 3.3 差分近似を用いた完全予見解

割引のある無限期間の最適化問題 (54)(55)(56) の解に関する常微分方程式

$$\dot{x}(t) = g(t, x(t), y(t)) \quad (125)$$

$$\dot{y}(t) = h(t, x(t), y(t)) \quad (126)$$

で、不動点  $(x^*, y^*)$  が定常状態となっている場合

$$x^* = \lim_{t \rightarrow \infty} \hat{x}(t), \quad y^* = \lim_{t \rightarrow \infty} \hat{y}(t) \quad (127)$$

を考える。状態変数  $\hat{x}(t)$  については初期値  $x(0) = x_0$ ，操作変数  $\hat{y}(t)$  については境界条件  $\lim_{t \rightarrow \infty} \hat{y}(t) = y^*$  を課すことになるので，常微分方程式の境界値問題になっている\*30。このとき，状態変数  $x(t)$  についての式 (103) は時間について前進差分 ((99) 式参照)，操作変数  $y(t)$  についての式 (104) は時間について後進差分をとって離散化

$$x_{n+1} = x_n + f(t_n, x_n, y_n)\Delta t \quad (128)$$

$$y_n = y_{n+1} + h(t_{n+1}, x_{n+1}, y_{n+1})\Delta t \quad (129)$$

し，得られる連立方程式をガウス・ザイデル法で解くことで，数値解が得られる。この数値解は，完全予見解に分類できる\*31。その数値解析のアルゴリズム以下のとおりである\*32。

#### 【アルゴリズム（連続時間モデルの完全予見解）】

1. 初期化：  $x^{(0)}$  を任意の値で埋める。  $i \leftarrow 1$  とおく。
2.  $n = N, N-1, \dots, 0$  に対して  $x^{(i-1)}$  を用いて  $y_N = y^*$  から  $y^{(i)}$  を求める。
3.  $n = 1, 2, \dots, N$  に対して  $y^{(i)}$  を用いて  $x_0$  から  $x^{(i')}$  を求め，  $x^{(i)} \leftarrow \chi x^{(i-1)} + (1 - \chi)x^{(i')}$  とおく\*33。
4.  $\|x^{(i)} - x^{(i-1)}\| < \epsilon$  のとき終了，それ以外るとき  $i \leftarrow i + 1$  とおいて 2. に戻る。

### 3.4 HJB 方程式の差分近似

割引のある無限期間の最適化問題 (54)(55)(56) において現在価値価値関数

$$v(t, x(t)) := \exp(\rho t)V(t, x(t)) \quad (130)$$

を用いて HJB 方程式を表すことを考える。

$$\begin{aligned} v(t_0, \hat{x}(t_0)) &= \int_{t_0}^{\infty} \exp(-\rho(t - t_0))f(t, \hat{x}(t), \hat{y}(t))dt \\ &= \int_{t_0}^{t_0+\Delta t} \exp(-\rho(t - t_0))f(t, \hat{x}(t), \hat{y}(t))dt + \int_{t_0+\Delta t}^{\infty} \exp(-\rho(t - t_0))f(t, \hat{x}(t), \hat{y}(t))dt \\ &= f(t_0, \hat{x}(t_0), \hat{y}(t_0))\Delta t + \exp(-\rho\Delta t)v(t_0 + \Delta t, \hat{x}(t_0 + \Delta t)) + o(\Delta t) \\ &= f(t_0, \hat{x}(t_0), \hat{y}(t_0))\Delta t + (1 - \rho\Delta t)v(t_0 + \Delta t, \hat{x}(t_0 + \Delta t)) + o(\Delta t). \end{aligned} \quad (131)$$

で，整理すると

$$\rho v(t_0 + \Delta t, \hat{x}(t_0 + \Delta t)) = f(t_0, \hat{x}(t_0), \hat{y}(t_0)) + \frac{v(t_0 + \Delta t, \hat{x}(t_0 + \Delta t)) - v(t_0, \hat{x}(t_0))}{\Delta t} + \frac{o(\Delta t)}{\Delta t} \quad (132)$$

\*30 状態変数には，過剰な制約になるので定常状態で境界条件は課さない。数値解が収束すれば，この境界条件は自動的に満たされる。

\*31 離散時間に関する蓮見 [2020] 6 章での議論を参照。Auerbach and Kotlikoff [1987] の世代重複モデルに対する完全予見解と同視できる。

\*32 このアルゴリズムを用いた計算の具体例は，4.1 項で紹介する。

\*33  $\chi$  は逐次加速緩和 (SOR: Successive Over-Relaxation) 法のパラメータで  $\chi \in (0, 2)$ 。

となるが,  $\Delta t \searrow 0$  の極限をとると

$$\begin{aligned} \rho v(t, \hat{x}(t)) &= f(t, \hat{x}(t), \hat{y}(t)) + \frac{dv}{dt}(t, \hat{x}(t)) \\ \Leftrightarrow \rho v(t, \hat{x}(t)) &= f(t, \hat{x}(t), \hat{y}(t)) + \dot{\hat{x}}(t) \frac{\partial v(t, \hat{x}(t))}{\partial x} + \frac{\partial v(t, \hat{x}(t))}{\partial t} \\ \Leftrightarrow \rho v(t, \hat{x}(t)) &= f(t, \hat{x}(t), \hat{y}(t)) + g(t, \hat{x}(t), \hat{y}(t)) \frac{\partial v(t, \hat{x}(t))}{\partial x} + \frac{\partial v(t, \hat{x}(t))}{\partial t}. \end{aligned} \quad (133)$$

$\mu(t) := \frac{\partial v(t, \hat{x}(t))}{\partial x}$  と定義し, 両辺を  $x$  で偏微分すると

$$\rho \mu(t) = f_x(t, \hat{x}(t), \hat{y}(t)) + g_x(t, \hat{x}(t), \hat{y}(t)) \mu(t) + \dot{\mu}(t) \quad (134)$$

より (59) 式を得る. よって, HJB 方程式 (133) は

$$\rho v(t, \hat{x}(t)) = \hat{H}(t, \hat{x}(t), \hat{y}(t), \mu(t)) + \frac{\partial v(t, \hat{x}(t))}{\partial t} \quad (135)$$

とも表せる (2023 年 2 月 22 日訂正).

もし定常状態で  $\frac{\partial v(t, \hat{x}(t))}{\partial t} = 0$  であれば, 時間に依存しない HJB 方程式

$$\rho v(x) = f(x, y) + g(x, y) \frac{dv(x)}{dx} \quad (136)$$

を  $\hat{H}_y(x, y, \mu) = 0$  のもとで有限差分法を用いて数値解析により解くことで,  $f, g$  が時間  $t$  に依存しない割引のある最適化問題 (100)(101)(102) の方策関数  $y = h(x)$  の近似を得ることができる. その数値解析のアルゴリズムは, 具体例 (ラムゼイモデル) を用いて, 一例を 4.1 節で紹介する.

このアルゴリズムは, 3.3 項の完全予見解を求めるアルゴリズムと組み合わせて, 状態変数  $x(t)$  の初期値が与えられている境界値問題の数値解を得るのに用いることができる. その際には, HJB 方程式 (135) は, 操作変数  $y(t)$  についての式と同様, 時間について後進差分をとって離散化する.

## 4 連続時間動学的一般均衡モデルの例

この節では, 連続時間一般均衡モデルの例としてラムゼイモデル (2.1 項も参照), ニューケインジアン・モデル, 硬直賃金モデルを取り上げるとともに, 前節で述べた数値解析アルゴリズムの適用例を紹介する.

### 4.1 ラムゼイモデルの解

ラムゼイモデル (Ramsey-Cass-Koopmans model)

$$\max_{c(t)} \int_0^{\infty} \exp(-\rho t) \frac{c(t)^{1-\theta} - 1}{1-\theta} dt \quad (2')$$

$$\text{subject to } \dot{k}(t) = k(t)^\alpha - \xi k(t) - c(t), \quad k(t) \geq 0 \quad (3')$$

の現在価値ハミルトニアン (57) は,

$$\hat{H}(k, c, \mu) := \frac{c(t)^{1-\theta} - 1}{1-\theta} + \mu(t)(k(t)^\alpha - \xi k(t) - c(t)) \quad (137)$$

と定義できる。ハミルトン方程式 (58)(59)(60) は

$$\hat{H}_c(k, c, \mu) = c(t)^{-\theta} - \mu(t) = 0 \quad (138)$$

$$\hat{H}_k(k, c, \mu) = \mu(t)(\alpha k(t)^{\alpha-1} - \xi) = \rho\mu(t) - \dot{\mu}(t) \quad (139)$$

$$\hat{H}_\mu(k, c, \mu) = k(t)^\alpha - \xi k(t) - c(t) = \dot{k}(t) \quad (140)$$

である。この方程式の不動点  $k^*$ ,  $c^*$  ((9) 式, (10) 式参照) は, 不動点が鞍点となる固有値の条件 (3.2 節参照) を満たすパラメータに対して定常状態  $k^* = \lim_{t \rightarrow \infty} \hat{k}(t)$ ,  $c^* = \lim_{t \rightarrow \infty} \hat{c}(t)$  である。このとき,  $\lim_{t \rightarrow \infty} \mu(t) = c^{*-\theta}$  だから, ハミルトン方程式の解は強横断性条件 (67) を満たす:

$$\lim_{t \rightarrow \infty} \left[ \exp(-\rho t) \mu(t) \hat{k}(t) \right] = 0. \quad (141)$$

制約条件  $k(t) \geq 0$  ((3') 式参照) より任意の実行可能な  $(k(t), c(t))$  に対して不等式 (68) が満たされる。消費の方策関数を  $c = h(k)$  とすると, これは  $k$  に対して単調増加なので, 効用関数および  $\mu$  は  $k$  に対して狭義凹関数であり,  $s(k) := k^\alpha - \xi k - h(k)$  も狭義凹関数となるから (図 4 参照), 最大化したハミルトニアン  $M(k) = \max_c H(k, c, \mu)$  が  $k$  について狭義凹関数である。したがって, ハミルトン方程式の解のうち極限が不動点である経路は, ラムゼイモデルの解の経路である。以下, 差分近似を用いた完全予見解, HJB 方程式の差分近似を用いた価値関数と方策関数の近似の 2 通りの方法で, ラムゼイモデルの数値解を示す。

差分近似を用いた完全予見解は, (138)(139) からラグランジュ乗数  $\mu(t)$  を消去したオイラー方程式

$$\frac{\dot{c}(t)}{c(t)} = \theta^{-1}(\alpha k(t)^{\alpha-1} - \xi - \rho) \quad (6')$$

と制約条件 (140) 式と定常状態である不動点  $k^*$ ,  $c^*$  を用いる。図 3 は, この方法で計算したラムゼイモデルの相図と解の定常状態への経路である。

次に, HJB 方程式の差分近似を用いた数値解を示す。まず, (138) 式および  $\mu(t) = \frac{dv(k(t))}{dk}$  より,  $u'(c(t)) = \frac{dv(k(t))}{dk}$ , したがって

$$c(t) = u'^{-1} \left( \frac{dv(k(t))}{dk} \right) \quad (142)$$

である。一方, 定常状態での HJB 方程式 (136) は

$$\rho v(k) = u(c) + s(k) \frac{dv(k)}{dk} \quad (143)$$

ここで,  $s(k) = k^\alpha - \xi k - c$  である。

価値関数の空間微分  $\frac{dv(k)}{dk}$  を後進差分  $(v_j - v_{j-1})/\Delta k$ , 前進差分  $(v_{j+1} - v_j)/\Delta k$  から以下のように近似する:

$$\rho v_j = u(c_j) + \min\{s_j^-, 0\} \frac{v_j - v_{j-1}}{\Delta k} + \max\{s_j^+, 0\} \frac{v_{j+1} - v_j}{\Delta k} \quad (144)$$

$$s_j^- := \phi(k_j) - \xi k_j - u'^{-1}((v_j - v_{j-1})/\Delta k) \quad (145)$$

$$s_j^+ := \phi(k_j) - \xi k_j - u'^{-1}((v_{j+1} - v_j)/\Delta k). \quad (146)$$

この近似を風上差分 (upwind difference) といい, 以下のアルゴリズムの中で用いる<sup>\*34</sup>。

<sup>\*34</sup> Candler [2001] 参照。その理論的な意味については, 例えば Petter Langtangen and Linge [2017], 藤井 and 立川 [2020] を参照。

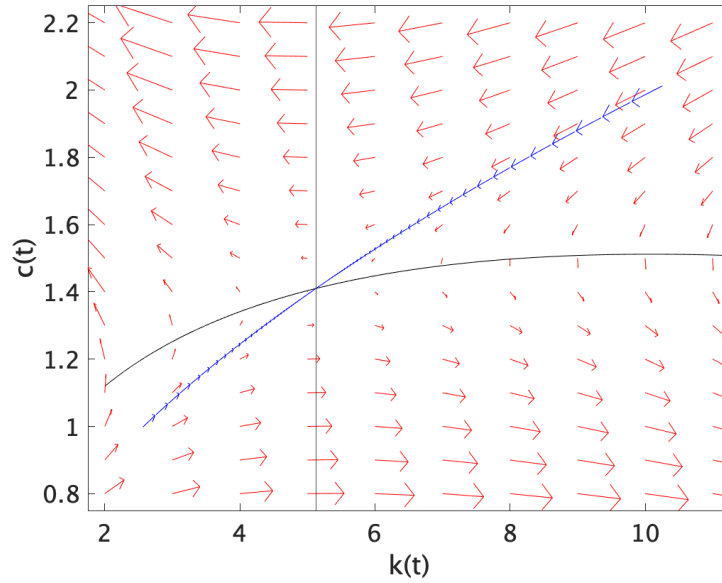


図3 ラムゼイモデルの解の定常状態への経路と相図 (ramsey\_pf.m)

注：パラメータは  $\rho = 0.05$ ,  $\theta = 2.0$ ,  $\alpha = 0.4$ ,  $\xi = 0.05$ ,  $\Delta t = 0.1$ , 初期値は  $k(0) = 0.5k^*$ ,  $2k^*$ .

#### 【アルゴリズム（風上差分法）】

1. 初期化：グリッド上での価値関数の値  $v^{(0)}$  を初期化．  $i \leftarrow 1$  とおく．
2. 各グリッド上で  $c_j^- := u'^{-1}((v_j^{(i-1)} - v_{j-1}^{(i-1)})/\Delta k)$ ,  $c_j^+ := u'^{-1}((v_{j+1}^{(i-1)} - v_j^{(i-1)})/\Delta k)$  を計算（(142) 式参照）．
3. 各グリッド上で  $s_j^- = \phi(k_j) - \xi k_j - c_j^-$ ,  $s_j^+ = \phi(k_j) - \xi k_j - c_j^+$  を計算（(145) 式, (146) 式）．
4.  $s_j^- < 0$  の場合  $\rho v_j = u(c_j^-) + s_j^- (v_j - v_{j-1})/\Delta k$ ,  $s_j^+ > 0$  の場合  $\rho v_j = u(c_j^+) + s_j^+ (v_{j+1} - v_j)/\Delta k$ ,  $s_j^- \geq 0$  かつ  $s_j^+ \leq 0$  の場合  $c_j^* := \phi(k_j) - \xi k_j$  として  $\rho v_j = u(c_j^*)$  を用い, (144) 式を  $v_j$  について線型の部分と定数の部分に分けて連立方程式  $Av = b$  を作る．
5. 4. の連立方程式を  $v$  について解いて,  $v^{(i)}$  とおく（ピカール反復法）．
6.  $\|v^{(i)} - v^{(i-1)}\| < \epsilon$  のとき終了, それ以外の場合  $i \leftarrow i + 1$  において 2. に戻る．

このアルゴリズムを用いて得た価値関数, 消費の方策関数, 貯蓄の方策関数を図4に示す．

## 4.2 連続時間ニューケインジアン・モデル

Kaplan et al. [2018] は, Rotemberg [1982] 型価格硬直モデルに基づく連続時間ニューケインジアン・フィリップス曲線が導出できることを示した<sup>\*35</sup>．この項では, 資本のないシンプルな連続時間ニューケインジアン・モデルを構築し, 生産性ショックと金融政策ショックを与えた場合のインパルス応答を Sims [2002] の方法を用いて描く．

<sup>\*35</sup> Kaplan et al. [2018] は, このニューケインジアン・フィリップス曲線を含む, 平均場ゲームとしての連続時間ヘテロジニアス・エージェント・ニューケインジアン (HANK) モデルを構築している．

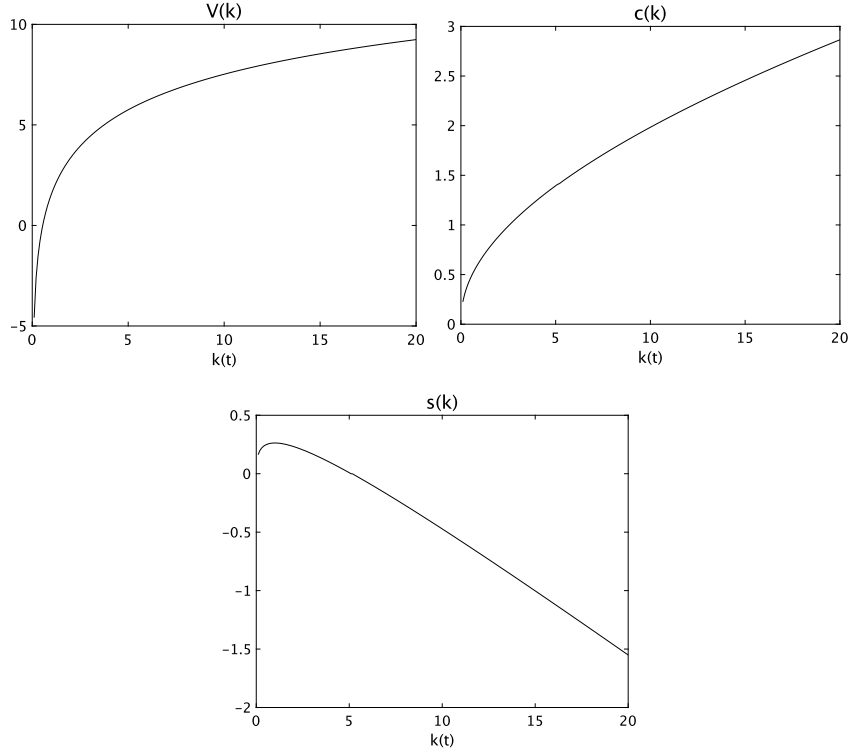


図4 ラムゼイモデルの HJB 方程式：左上 価値関数，右上 消費の方策関数，下 貯蓄の方策関数) (ramsey\_fd.m)

注：パラメータは図3の場合と同じ， $\Delta t = 0.1$ 。

家計の最適化問題を以下のように定式化する：

$$\max_{c(t), n(t)} \int_0^{\infty} \exp(-\rho t) u(c(t), n(t)) dt \quad (147)$$

$$\text{subject to } \dot{b}(t) = (i(t) - \pi(t))b(t) + w(t)n(t) - c(t) + \tau(t) \quad (148)$$

$$\lim_{t \rightarrow \infty} \left[ b(t) \exp \left( - \int_0^t (i(s) - \pi(s)) ds \right) \right] \geq 0. \quad (149)$$

(147) 式は通時的な効用関数， $c(t)$  は消費，(148) 式は金融資産  $b(t)$  の蓄積過程， $n(t)$  は労働量， $i(t)$  は名目利子率， $\pi(t) := \dot{P}(t)/P(t)$  はインフレ率， $w(t)$  は賃金， $\tau(t)$  は独占的競争から生じる利潤である。(149) 式は，非ポンジゲーム条件である。即時効用関数  $u$  は

$$u(c(t), n(t)) := \frac{c(t)^{1-\theta} - 1}{1-\theta} - a_n \frac{n(t)^{1+\eta}}{1+\eta} \quad (150)$$

とおく。ハミルトン方程式 (58)(59) は

$$\hat{H}_c(b, c, n, \mu) = u_c(c(t), n(t)) - \mu(t) = 0 \quad (151)$$

$$\hat{H}_n(b, c, n, \mu) = u_n(c(t), n(t)) + \mu(t)w(t) = 0 \quad (152)$$

$$\hat{H}_b(b, c, n, \mu) = \mu(t)(i(t) - \pi(t)) = \rho\mu(t) - \dot{\mu}(t) \quad (153)$$

である。生産関数および生産性  $a(t)$  の過程を以下のように定義する：

$$c(t) = \exp(a(t))n(t) \quad (154)$$

$$\dot{a}(t) = -\zeta_a a(t) + \epsilon(t). \quad (155)$$

以下、ニューケインジアン・フィリップス曲線を導出する。企業の  $t$  期の利潤  $\Pi(t)$  は、限界費用  $m(t) := w(t)/\exp(a(t))$  を用いて

$$\Pi(t) := \left( \frac{p(t)}{P(t)} - m(t) \right) \left( \frac{p(t)}{P(t)} \right)^{-\varepsilon} Y(t) - \frac{\gamma}{2} \left( \frac{\dot{p}(t)}{p(t)} \right)^2 Y(t) \quad (156)$$

と表される。ラグランジアン  $\mathcal{L}(t) := e^{-\int_0^t r(s)ds} \Pi(t)$  を定義し、その時間積分（利潤の現在価値） $W := \int_0^\infty \mathcal{L}(t)dt$  に変分法を適用する。対応するオイラー方程式は  $\frac{d}{dt} \left( \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial \dot{p}} \right) - \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial p} = 0$  なので、以下のように計算する：

$$\frac{\partial \mathcal{L}}{\partial p} = e^{-\int_0^t r(s)ds} \left[ \frac{1-\varepsilon}{P(t)} \left( \frac{p(t)}{P(t)} \right)^{-\varepsilon} + \frac{\varepsilon m(t)}{P(t)} \left( \frac{p(t)}{P(t)} \right)^{-\varepsilon-1} + \frac{\gamma}{p(t)} \left( \frac{\dot{p}(t)}{p(t)} \right)^2 \right] Y(t) \quad (157)$$

$$\frac{\partial \mathcal{L}}{\partial \dot{p}} = e^{-\int_0^t r(s)ds} \left[ -\frac{\gamma}{p(t)} \left( \frac{\dot{p}(t)}{p(t)} \right) \right] Y(t) = -\gamma e^{-\int_0^t r(s)ds} \frac{\pi(t)Y(t)}{p(t)} \quad (158)$$

$$\begin{aligned} \frac{d}{dt} \left( \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial \dot{p}} \right) &= -\gamma e^{-\int_0^t r(s)ds} \left( -\frac{r(t)\pi(t)Y(t)}{p(t)} - \frac{\dot{p}(t)\pi(t)Y(t)}{p(t)^2} + \frac{\dot{\pi}(t)Y(t)}{p(t)} + \frac{\pi(t)\dot{Y}(t)}{p(t)} \right) \\ &= e^{-\int_0^t r(s)ds} \gamma \left( r(t)\pi(t) + \pi(t)^2 - \dot{\pi}(t) - \frac{\dot{Y}(t)}{Y(t)}\pi(t) \right) \frac{Y(t)}{p(t)}. \end{aligned} \quad (159)$$

同質性条件  $P(t) = p(t)$  を用いてオイラー方程式に代入して整理すると

$$\begin{aligned} &\gamma \left( r(t)\pi(t) + \pi(t)^2 - \dot{\pi}(t) - \frac{\dot{Y}(t)}{Y(t)}\pi(t) \right) - (1-\varepsilon) - \varepsilon m(t) - \gamma \pi(t)^2 = 0 \\ \Leftrightarrow &\pi(t) \left( r(t) - \frac{\dot{Y}(t)}{Y(t)} \right) = \frac{\varepsilon}{\gamma} \left( m(t) - \frac{\varepsilon-1}{\varepsilon} \right) + \dot{\pi}(t) \end{aligned} \quad (160)$$

だが、市場清算条件  $Y(t) = c(t)$  を用いると、ニューケインジアン・フィリップス曲線は

$$\pi(t)(r(t) - \dot{c}(t)/c(t)) = \frac{\varepsilon}{\gamma}(m(t) - m^*) + \dot{\pi}(t) \quad (161)$$

$$m^* := \frac{\varepsilon-1}{\varepsilon} \quad (162)$$

と表される。金融政策にはテイラールール型を用い、金融政策ルールからの乖離  $v(t)$  の過程を

$$\dot{i}(t) = \bar{i} + \phi_\pi \pi(t) + \phi_y (c(t) - \exp(a(t))c^*) + v(t) \quad (163)$$

$$\dot{v}(t) = -\zeta_v v(t) + e(t) \quad (164)$$

とおく。

生産性ショック  $\epsilon(t) = \delta(t)$  および金融政策ショック  $e(t) = \delta(t)$  に対するインパルス応答をそれぞれみたものが図 5 である。離散時間の場合とほぼ同様の形状であることがみてとれる<sup>\*36</sup>。

<sup>\*36</sup> 例えば、加藤 [2007] 2 章、蓮見 [2020] 5 章を参照。



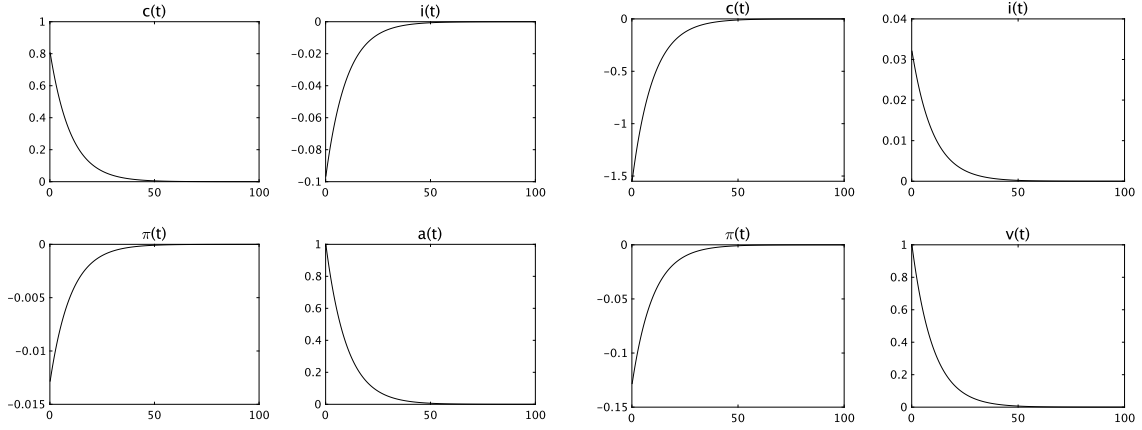


図5 ニューケインジアン・モデルのインパルス応答：左 技術ショック，右 金融政策ショック (nk.m)

注：パラメータは， $\rho = 0.05$ ， $\theta = 1.0$ ， $\eta = 5.0$ ， $\varepsilon = 5.0$ ， $\gamma = 2000$ ， $\phi_\pi = 1.5$ ， $\phi_y = 0.5$ ， $\zeta_a = 0.1$ ， $\zeta_v = 0.1$ 。

### 4.3 硬直賃金モデル

3つ目の例として，ラムゼイモデルに対し，Erceg et al. [2000] の硬直賃金モデルの Rotemberg 型での導入を試みる．4.2 項と同様，生産性ショックを与えた場合のインパルス応答を Sims [2002] の方法を用いて描く．

最適化問題を以下のように定式化する：

$$\max_{c(t), n(t)} \int_0^\infty \exp(-\rho t) u(c(t), n(t)) dt \quad (165)$$

$$\dot{k}(t) = w(t)n(t) + r(t)k(t) - 0.5\gamma\pi_w(t)^2 - \xi k(t) - c(t) + \tau(t), \quad k(t) \geq 0 \quad (166)$$

$$\pi_w(t) := \dot{w}(t)/w(t) \quad (167)$$

$$n(t) = \left( \frac{w(t)}{W(t)} \right)^{-\nu} N(t). \quad (168)$$

4.1 項のモデルとの違いとして，家計が供給する労働  $n(t)$  が差別化されているというのが硬直賃金モデルである．効用関数は 4.2 項と同様に (150) 式のようにおく．現在価値ハミルトニアンを

$$\begin{aligned} \hat{H}(k, c, w, \pi_w, \mu_c, \mu_w) := & u(c(t), n(w(t))) \\ & + \mu_c(t)[w(t)n(w(t)) + r(t)k(t) - 0.5\gamma\pi_w(t)^2 - \xi k(t) - c(t) + \tau(t)] + \mu_w(t)\pi_w(t)w(t) \end{aligned} \quad (169)$$

と定義する．ハミルトン方程式 (73)(74) は，

$$\hat{H}_c(k, c, w, \pi_w, \mu_c, \mu_w) = u_c(c(t), n(w(t))) - \mu_c(t) = 0 \quad (170)$$

$$\hat{H}_k(k, c, w, \pi_w, \mu_c, \mu_w) = \mu_c(t)r(t) = \rho\mu_c(t) - \dot{\mu}_c(t) \quad (171)$$

$$\hat{H}_{\pi_w}(k, c, w, \pi_w, \mu_c, \mu_w) = -\gamma\mu_c(t)\pi_w(t) + \mu_w(t)w(t) = 0 \quad (172)$$

$$\begin{aligned} \hat{H}_w(k, c, w, \pi_w, \mu_c, \mu_w) = \\ - \frac{\nu}{w(t)} \left( \frac{w(t)}{W(t)} \right)^{-\nu} u_n(c(t), n(w(t)))N(t) + (1 - \nu)\mu_c(t) \left( \frac{w(t)}{W(t)} \right)^{-\nu} N(t) = \rho\mu_w(t) - \dot{\mu}_w(t) \end{aligned} \quad (173)$$

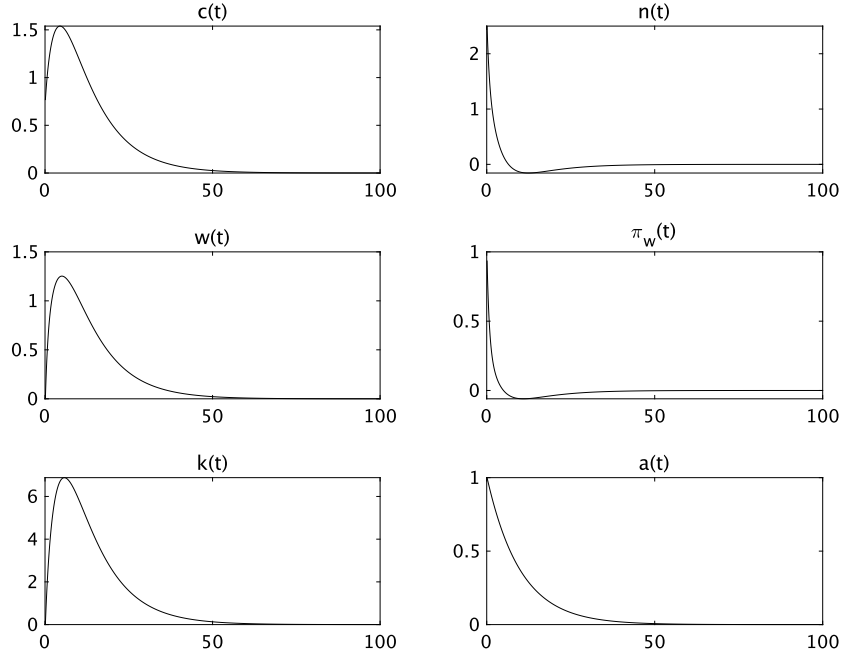


図6 硬直賃金モデルの技術ショックに対するインパルス応答 (sticky\_wage.m)

注：パラメータは， $\rho = 0.05$ ,  $\theta = 1.0$ ,  $\alpha = 0.4$ ,  $\xi = 0.1$ ,  $\zeta = 0.1$ ,  $\eta = 1.0$ ,  $\nu = 10$ ,  $\gamma = 100$ .

である．(172) 式と (173) 式から  $\mu_w(t)$  を消去して同質性条件  $w(t) = W(t)$  を用いれば，賃金フィリップス曲線

$$-\nu u_n(c(t), n(t))N(t) + (1 - \nu)\mu_c(t)N(t)W(t) = \gamma\mu(t) \left( \rho\pi_w(t) - \dot{\pi}_w(t) - \frac{\dot{\mu}_c(t)}{\mu_c(t)}\pi_w(t) \right) \quad (174)$$

を得る．

生産関数を

$$y(t) = \exp(a(t))k(t)^\alpha n(t)^{1-\alpha} \quad (175)$$

とする．実質利子率  $r(t)$  は限界生産力に等しくなる：

$$r(t) = \alpha \exp(a(t))(k(t)/n(t))^{\alpha-1}. \quad (176)$$

生産性  $a(t)$  の過程は 4.2 項と同様

$$\dot{a}(t) = -\zeta_a a(t) + \epsilon(t) \quad (155')$$

とおく．

生産性ショック  $\epsilon(t) = \delta(t)$  に対するインパルス応答をみたものが図6である．4.2 項の場合の図5と比較すると，賃金  $w(t)$  が状態変数となったことで，粘着的な動きをすることが確認できる．

## 5 結語

本稿では，第1に，連続時間最適化問題の解に関する古典的な議論の整理を行った．数学的には定理ごとに仮定が異なるなど注意すべきことが多いが，実用上は，ハミルトン方程式の解のうち，

不動点に収束する経路を連続時間最適化問題の解とみなしてしまつてよい場合が多い。不確実性を取り入れた連続時間最適化問題では HJB 方程式を直接取り扱わなければならないが、あらかじめその古典的な意味づけを確認しておくことは有用であろう<sup>\*37</sup>。

第 2 に、微分方程式と横断性条件の組み合わせとして得られる連続時間最適化問題の解（の候補）について、定常状態周りで線型化した線型方程式の係数行列の固有値を用いて、定常状態の近傍での解の存在と一意性を調べる方法について述べた。解の十分条件を用いる方法と比べて計算が容易であり、実用上有用である。この方法により、線型近似したモデルの解の経路も得ることができる。

第 3 に、連続時間最適化問題の数値解を得る方法として、常微分方程式の境界値問題を差分近似を用いて解くことでいわゆる完全予見解を得る方法を紹介した。また、別の方法として、定常状態での HJB 方程式と一階条件を対にして偏微分方程式の差分近似を用いて解くことで、時間に依存しない割引のある最適化問題の価値関数と方策関数が得られることを示した。外生変数が存在するなど  $g$  が時間に依存する場合にも、完全予見解の計算方法と組み合わせることで、各時点での価値関数と方策関数を得ることができる。不確実性のない連続時間最適化問題ではこの方法を用いる必要性に乏しいが、Kaplan et al. [2018] が明らかにした通り、不確実性を取り入れた連続時間最適化問題の数値解法として有力である。

## 参考文献

- Acemoglu, Daron (2009) *Introduction to Modern Economic Growth* (Princeton University Press)
- Achdou, Yves, Jiequn Han, Jean-Michel Lasry, Pierre-Louis Lions, and Benjamin Moll (2017) ‘Income and wealth distribution in macroeconomics: A continuous-time approach.’ NBER Working Paper No. 23732
- Ahn, SeHyoung, Greg Kaplan, Benjamin Moll, Thomas Winberry, and Christian Wolf (2018) ‘When inequality matters for macro and macro matters for inequality.’ *NBER macroeconomics annual* 32(1), 1–75
- Aiyagari, S Rao (1994) ‘Uninsured idiosyncratic risk and aggregate saving.’ *The Quarterly Journal of Economics* 109(3), 659–684
- Arrow, Kenneth J, and Mordecai Kruz (1970) *Public investment, the rate of return, and optimal fiscal policy* (Routledge)
- Auerbach, Alan J, and Laurence J Kotlikoff (1987) *Dynamic fiscal policy* (Cambridge University Press)
- Bewley, Truman F (1986) ‘Stationary monetary equilibrium with a continuum of independently fluctuating consumers.’ In *Contributions to mathematical economics in honor of Gérard Debreu*, ed. Werner Hildenbrand and Andreu Mas-Colell (North-Holland) pp. 79–102

<sup>\*37</sup> 不確実性のある場合の HJB 方程式は

$$\rho v(t, x(t)) = f(t, x(t), y(t)) + g(t, x(t), y(t)) \frac{\partial v(t, x(t))}{\partial x} + \frac{1}{2} \sigma^2 \frac{\partial^2 v(t, x(t))}{\partial x^2} + \frac{\partial v(t, x(t))}{\partial t} \quad (177)$$

のように 2 次の項が加わるが、計算の難易度はそれほど変わらない。

- Blanchard, Olivier J, and Charles M Kahn (1980) ‘The solution of linear difference models under rational expectations.’ *Econometrica* 48(5), 1305–1311
- Candler, Graham V (2001) ‘Finite-difference methods for continuous-time dynamic programming.’ In *Computational Methods for the Study of Dynamic Economies*, ed. Ramon Marimon and Andrew Scott (Oxford University Press) chapter 8
- Cass, David (1965) ‘Optimum growth in an aggregative model of capital accumulation.’ *The Review of economic studies* 32(3), 233–240
- Christiano, Lawrence J, Martin Eichenbaum, and Charles L Evans (2005) ‘Nominal rigidities and the dynamic effects of a shock to monetary policy.’ *Journal of political Economy* 113(1), 1–45
- Erceg, Christopher J, Dale W Henderson, and Andrew T Levin (2000) ‘Optimal monetary policy with staggered wage and price contracts.’ *Journal of monetary Economics* 46(2), 281–313
- Huggett, Mark (1993) ‘The risk-free rate in heterogeneous-agent incomplete-insurance economies.’ *Journal of economic Dynamics and Control* 17(5-6), 953–969
- Kaplan, Greg, Benjamin Moll, and Giovanni L Violante (2018) ‘Monetary policy according to hank.’ *American Economic Review* 108(3), 697–743
- Koopmans, Tjalling C (1963) ‘On the concept of optimal economic growth.’ Cowles Foundation Discussion Paper No. 163
- Kydland, Finn E, and Edward C Prescott (1982) ‘Time to build and aggregate fluctuations.’ *Econometrica* 50(6), 1345–1370
- Lasry, Jean-Michel, and Pierre-Louis Lions (2007) ‘Mean field games.’ *Japanese journal of mathematics* 2(1), 229–260
- Petter Langtangen, Hans, and Svein Linge (2017) *Finite difference computing with PDEs: a modern software approach* (Springer Nature)
- Ramsey, Frank (1928) ‘A mathematical model of savings.’ *Economic Journal* 38(152), 543–559
- Rotemberg, Julio J (1982) ‘Sticky prices in the united states.’ *Journal of Political Economy* 90(6), 1187–1211
- Sims, Christopher A (2002) ‘Solving linear rational expectations models.’ *Computational Economics* 20(1-2), 1–20
- ポントリャーギン, L. S. (2009) 最適制御理論における最大値原理 (森北出版). 坂本 實 (翻訳)
- 加藤, 涼 (2007) 現代マクロ経済学講義 (東洋経済新報社)
- 高橋, 陽一郎 (1988) 微分方程式入門 (東京大学出版会)
- 上東, 貴志 (2002) ‘横断性条件の必要性和十分性.’ 神戸大学経済経営研究所 Discussion Paper Series No. 45
- 須藤, 靖 (2019) 解析力学・量子論 第2版 (東京大学出版会)
- 齊藤, 正彦 (1966) 線型代数入門 (東京大学出版会)
- 谷島, 賢二 (2018) 数理物理入門 改訂改題 (東京大学出版会)
- 藤井, 孝藏, and 智章 立川 (2020) *Python で学ぶ流体力学の数値計算法* (オーム社)
- 蓮見, 亮 (2020) 動学マクロ経済学へのいざない (日本評論社)