7-2. フーリエ変換とその応用

1　フーリエ変換

フーリエ級数展開

周期 T(周波数 $f = 1/T$) の周期関数 $x(t)$ は、

$$x(t) = \sum_{n=-\infty}^{\infty} c_n \exp\left(i\frac{2\pi nt}{T}\right) \tag{1}$$

で表現できる。

$$c_n = \frac{1}{T}\int_{-T/2}^{T/2} x(t) \exp\left(-i\frac{2\pi nt}{T}\right) dt \tag{2}$$

をフーリエ係数という。

i は虚数単位で、$exp(i\theta) = \cos\theta + i\sin\theta$ である（オイラーの公式）。

フーリエ級数展開の周期Tを無限大にしたもの（$x(t)$の周波数成分が0から無限大まであることを意味する）がフーリエ変換である。

フーリエ変換

$x(t)$が絶対可積分の条件を満たすとき

$$X(f) = \int_{-\infty}^{\infty} x(t)\exp(-i2\pi f t)dt \tag{3}$$

が存在し、この$X(f)$を$x(t)$のフーリエ変換という。さらに、次をフーリエ逆変換という。

$$x(t) = \int_{-\infty}^{\infty} X(f)\exp(i2\pi f t)df \tag{4}$$

離散フーリエ変換

周期 T の周期関数 $f(t)$ の T を N 等分したサンプリング周期 $\Delta T = T/N$ での離散データを考える。$x_n = x(n\Delta T)$ としたとき、

$$X_k = \Delta T \sum_{n=0}^{N-1} x_n \exp(-i2\pi kn/N) \tag{5}$$

を $x(t)$ の離散フーリエ変換という。逆離散フーリエ変換は以下で与えられる。

$$x_n = \frac{1}{N} \sum_{k=0}^{N-1} X_k \exp(i2\pi kn/N) \tag{6}$$

2　パワースペクトル密度

不規則信号 $x(t)$ から区間 $[-T/2, T/2]$ で定義される関数

$$x_T(t) = \begin{cases} x(t), & |t| \le T/2 \\ \ \ 0 \quad, & |t| > T/2 \end{cases}$$

を考える。

パワースペクトル密度 (PSD)

確率過程 $x(t)$ のパワースペクトル密度（Power Spectrum Density）を

$$S_P(f) = \lim_{T\to\infty} E\left\{\frac{|X_T(f)|^2}{T}\right\} \qquad (7)$$

で定義する。$X_T(f)$ は $x_T(t)$ のフーリエ変換。

ウィナー・ヒンチンの定理

確率過程 $x(t)$ の自己相関関数を

$$R(\tau) = E[x(t)x(t+\tau)] \tag{8}$$

とおくとき、そのフーリエ変換はPSDに等しい：

$$S_P(f) = \int_{-\infty}^{\infty} R(\tau)\exp(-i2\pi f\tau)d\tau \tag{9}$$

この逆に、PSDの逆フーリエ変換は自己相関関数に等しい:

$$R(\tau) = \int_{-\infty}^{\infty} S_P(f)\exp(i2\pi f\tau)df \tag{10}$$

(10)式で $\tau = 0$ とおくと、

$$R(0) = \sigma_x^2 = \int_{-\infty}^{\infty} S_P(f)df \tag{11}$$

となり、$x(t)$ の分散になる。

PSDの推定値（ピリオドグラム法）

離散データ x_n のPSDの推定値 $\hat{S}_P(f)$ は、離散フーリエ変換 $X_k = \Delta T \sum_{n=0}^{N-1} x_n \exp(-i2\pi kn/N)$ を用いて

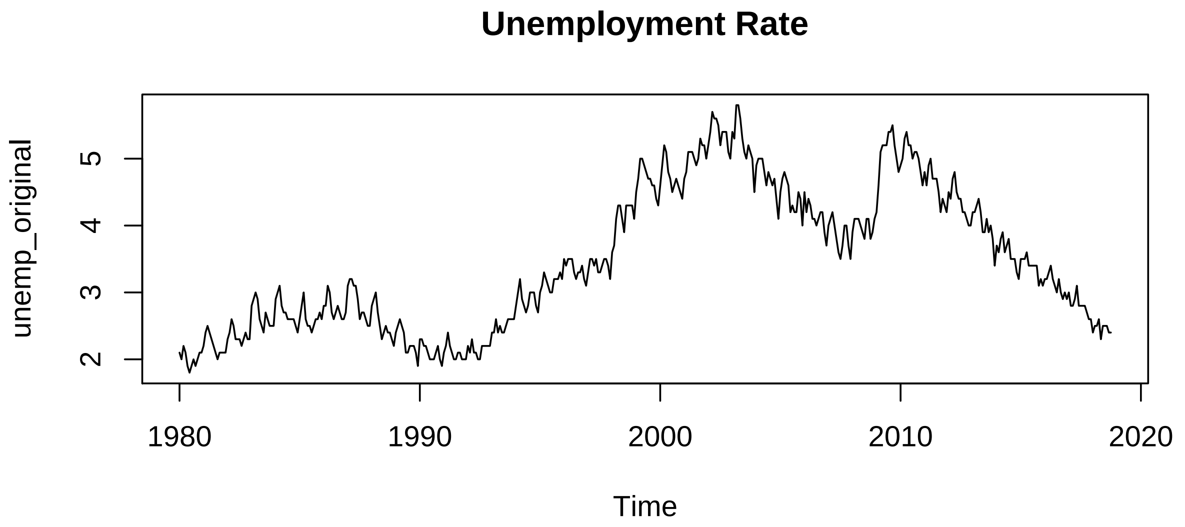
$$\hat{S}_P(f) = \hat{S}_P(k/N\Delta T) = \frac{1}{N\Delta T}|X_k|^2 \tag{12}$$

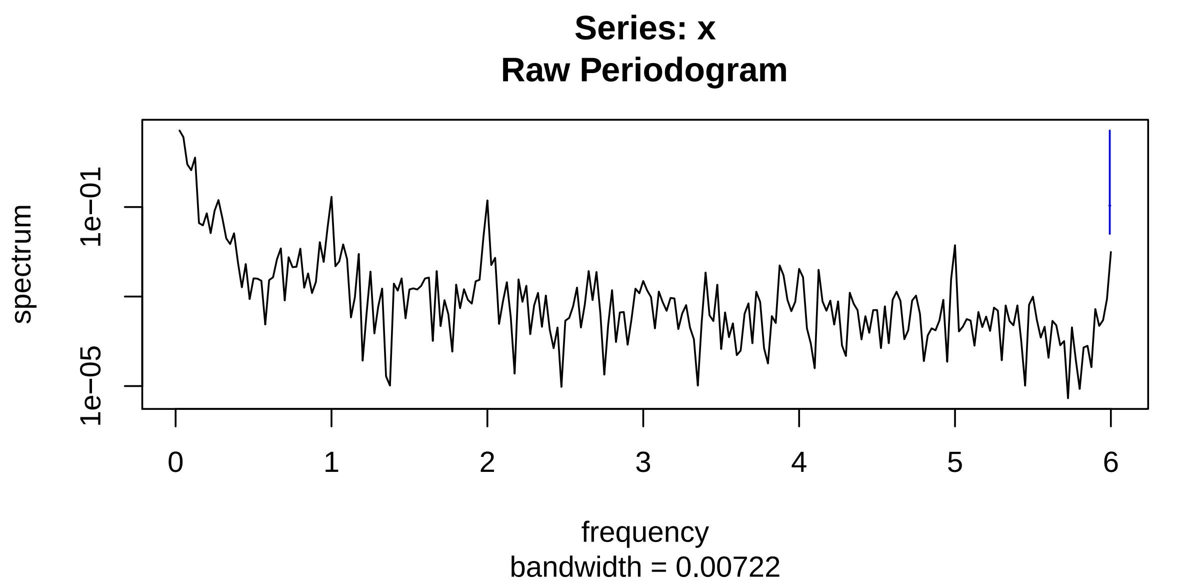
で与えられる。

パワースペクトル密度の意味

PSDは確率過程 $x(t)$ にどのような周波数成分が含まれるかを表す。
Rでは、spectrum()関数を用いて計算できる。

3　スペクトル解析の例: 失業率と季節性





4　バンドパス・フィルター

バンドパス・フィルターを用いると、特定の周波数成分のみを含む波を取り出すことができる。実用的には、Christiano and Fitzgerald Filterを用いることができる。Rでは、mFilterパッケージにcffilter()という関数がある。

失業率への適用例

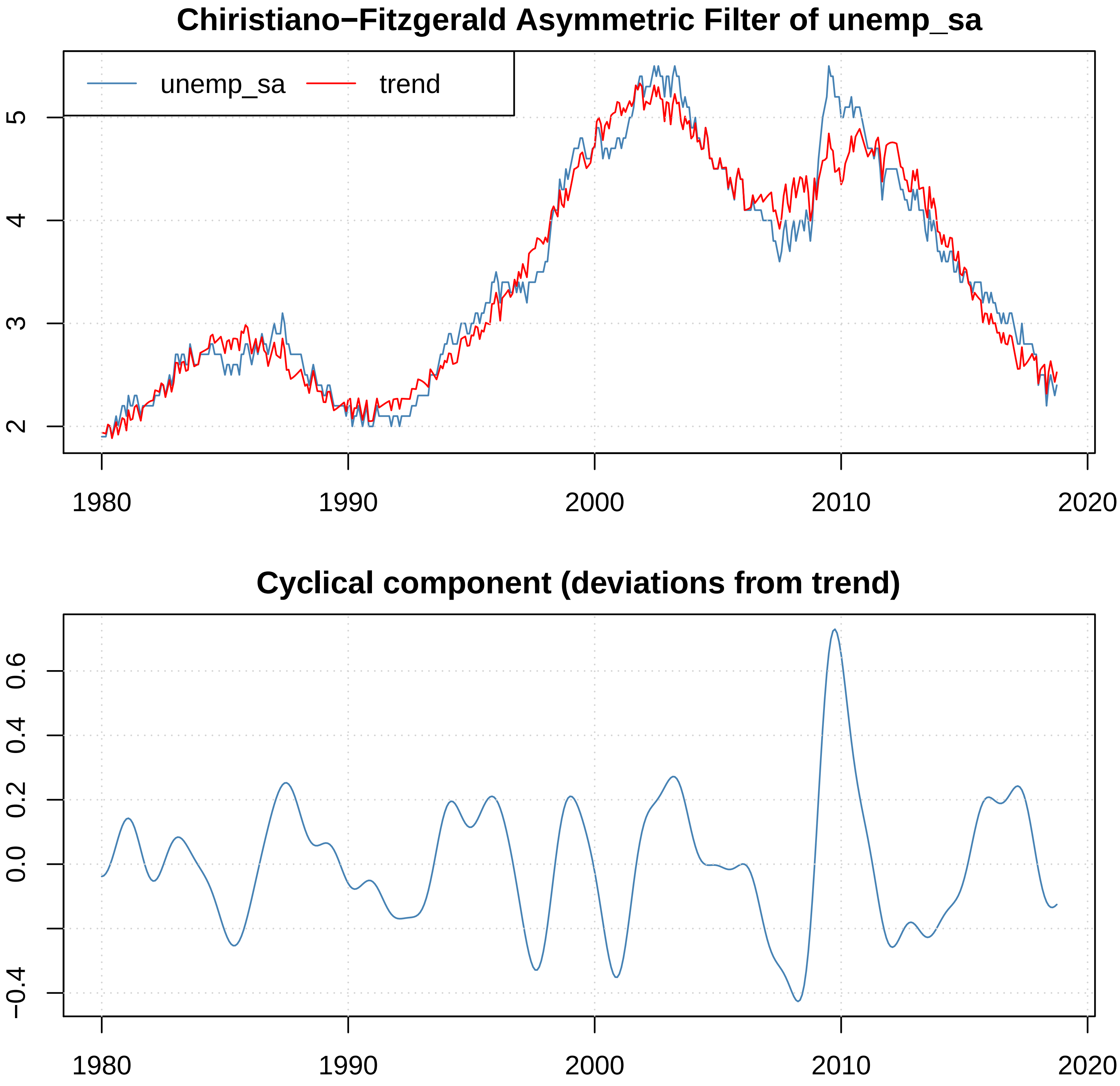
例1（次ページ）

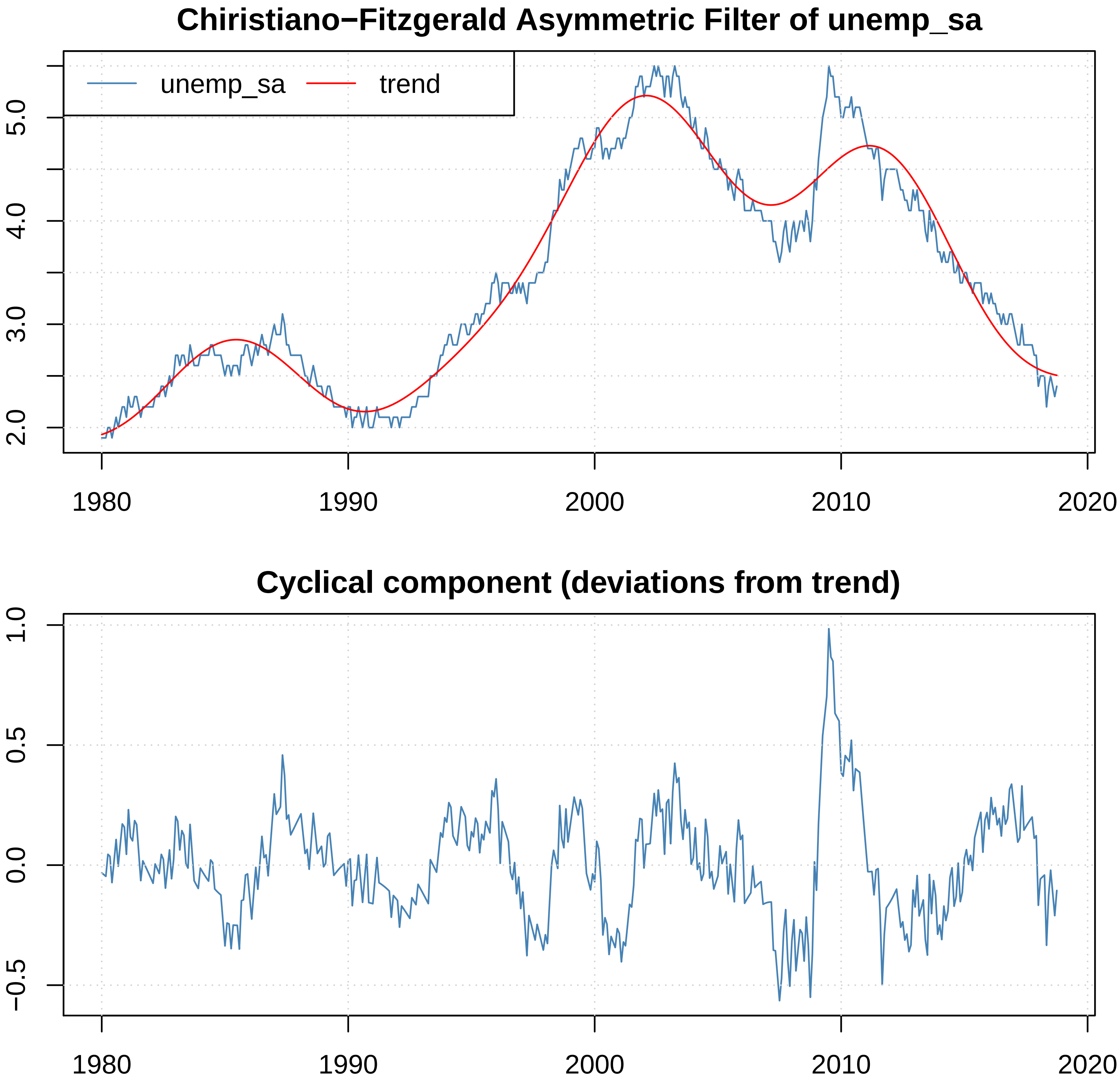
```
library(mFilter)
unemp.cf <- cffilter(unemp_sa, pl=18, pu=96, root = T)
plot(unemp.cf)
```

例2（次次ページ）

```
unemp.tr <- cffilter(unemp_sa, pl=2, pu=96, root = T)
plot(unemp.tr)
```

上記の例では、それぞれ18〜96か月周期、2〜96か月周期の成分が循環成分（cyclical component）に、残りがトレンドに分解される。


Chiristiano−Fitzgerald Asymmetric Filter of unemp_sa
unemp_sa
trend
2
3
4
5
1980
1990
2000
2010
2020
Cyclical component (deviations from trend)
−0.4
0.0
0.2
0.4
0.6
1980
1990
2000
2010
2020


Chiristiano−Fitzgerald Asymmetric Filter of unemp_sa
unemp_sa
trend
2.0
3.0
4.0
5.0
1980
1990
2000
2010
2020
Cyclical component (deviations from trend)
−0.5
0.0
0.5
1.0
1980
1990
2000
2010
2020