Ⅰ.基礎編

1. 方程式を解く（1）非線形方程式

問1-1（ファイナンス）

ある会社が、現在1000万ドル投資するとその4年後に1500万ドルの収益を獲得できるプロジェクトをもっているものとしよう。

a)　利子率が11％のとき、同社はそのプロジェクトを実施すべきだろうか。10％ではどうか、9％と8％の場合もしなさい。

b)　このプロジェクトが利益を生むか生まないかの境界線となる利子率を正確に計算すると、何％になるだろうか。

利子率（割引率）r%とすると、n期後のXの現在価値は、

$$\frac{X}{(1+r/100)^n}$$

である。

b)の利子率は、内部収益率(Internal Rate of Return: IRR))と呼ばれる。

問1-2（費用関数）

あるプライステーカー企業の費用関数が

$$C(y) = y^3 - 2y^2 + 5y + 8$$

であるとする（C:総費用、y:生産量）。

(1)　$C(y)$ を微分することにより、限界費用曲線を求めよ。
(2)　平均費用曲線を求めよ。
(3)　この企業の固定費用はいくらか。
(4)　平均可変費用曲線を求めよ。
(5)　損益分岐点は、限界費用曲線と平均費用曲線の交点である。その点での生産量と価格（限界費用に等しい）を求めよ。
(6)　操業停止点は、限界費用曲線と平均可変費用曲線の交点である。その点での生産量と価格（限界費用に等しい）を求めよ。

（２）連立方程式

問1-3（マクロモデル）

ある国のマクロ経済が以下のようなモデルで表されているとする:

$$\text{消費関数}: C = 30 + 0.6Y$$

$$\text{投資関数}: I = 20 - 2r$$

$$GDP: Y = C + I + G$$

$$\text{貨幣需要}: M^d = 0.5Y + 150 - 5r$$

$$\text{貨幣供給}: M^s = 200.$$

G は政府支出、r は利子率である。

(1)　$G = 0$ のときの各変数の均衡値を求めよ。
(2)　$G = 10$ のときの各変数の均衡値を求めよ。

問1-4（マルコフ連鎖）

天気の推移確率が以下のような表（行列）で表されているとする。

		明日の天気		
		雪	曇り	晴れ
今日の天気	雪	0.4	0.6	0
	曇り	0.2	0.5	0.3
	晴れ	0.1	0.7	0.2

上記の表は例えば雪から曇りになる確率は0.6であることを示している。

(1)　表の横方向の和（行の和）を求めなさい。

(2)　長期（定常状態）において、雪、曇り、晴れの頻度はどのような割合になるか、計算しなさい。

2. 関数の最大化・最小化

- 関数の最大化・最小化は最適化（optimization）とも呼ばれる。
- 制約条件なしの場合は、微分を用いるか、そのまま最大化・最小化する。
- 制約条件あり（例えば予算制約）の場合は、多くの場合ラグランジュの未定乗数法が第１の選択肢。

問2-1（利潤最大化）

土地Nと資本Kと労働Lを投入することにより生産を行う企業を考えよう．その生産関数を

$$Y = N^{\alpha_1} K^{\alpha_2} L^{1-\alpha_1-\alpha_2} \tag{1}$$

とする．Yは生産量，α_1, α_2は分配パラメータであり，それぞれ0.1, 0.3とする。土地は$N = 10$で一定であり，資本のレンタルプライス（実質金利）は$r = 0.1$、賃金は$w = 1$で固定されているものとする．生産物の価格は1とする．このとき，企業の利潤は，

$$\Pi = Y - (rK + wL) = N^{\alpha_1} K^{\alpha_2} L^{1-\alpha_1-\alpha_2} - (rK + wL) \tag{2}$$

と定義できる．

(1)　利潤を最大とする(K, L)の値を求めよ．
(2)　$Y = \bar{Y}$で一定とするとき、費用$rK + wL$を最小にする(K, L)の値を求めよ．

問2-2（効用最大化）

A,B,Cという財があるとし，効用関数Uを

$$U(a,b,c)=\ln(a)+\ln(b)+\ln(c) \tag{3}$$

とする．aはA財の消費量，bはB財の消費量，cはC財の消費量で，ゼロ以上の実数であるものとする．A財の価格は100円，B財の価格は80円，C財の価格は50円とし，予算は2,000円あるとしよう．

(1)　効用関数Uを最大にする(a,b,c)のペアを求めよ．

(2)　(a,b,c)が全て整数である場合はどうか．

問2-3（最小二乗法）

次のデータを用いて、利益率を広告費で説明する定数項ありの回帰式を作り、回帰係数の最小二乗推定量を求めなさい。

広告費率（%）	x	1.2	0.7	1.5	1.8	0.5	3.4	1.0	3.0	2.8	2.5
利益率（%）	y	2.7	2.4	2.7	3.3	1.1	5.8	2.2	4.2	4.4	3.8

3. モンテカルロ法

モンテカルロ法とは，コンピュータにより生成される擬似乱数を用いる数値計算法の総称である．まず一様乱数（$[0,\ 1]$ で一様に分布する乱数）を生成し，それを加工することで，主要な確率分布に従う乱数を生成できる．

数値計算ソフトウェアには，多くの場合，一様乱数を含む擬似乱数生成のアルゴリズムが組み込まれており，例えばRはメルセンヌ・ツイスタと呼ばれるアルゴリズムで一様乱数を生成する．その一様乱数を用いて，例えばボックス・ミュラー法と呼ばれる方法で正規分布に従う乱数を生成できる．

Rでは，確率変数の確率密度関数，分布関数，分位関数，乱数生成器は4つ一組で扱われる．

	一様分布	正規分布
確率密度関数	dunif	dnorm
分布関数	punif	pnorm
分位関数	qunif	qnorm
乱数生成器	runif	rnorm

問3-1（モンテカルロ法1）

a, b を2個の独立な一様乱数とすると、(a, b) は一辺の長さが1の正方形の中に均等に分布する。この正方形の中に丁度収まる円の直径は1である。(a, b) を多数生成して、円の内部に含まれる点の数を計算することで円周率が計算できる。

(1)　(a, b) の組を100個生成することで、円周率の推計値を求めなさい。

(2)　(a, b) の組を10,000個の場合はどうか。

問3-2（モンテカルロ法2）

問1-4のマルコフ連鎖において、雪が何日連続続くことが多いか、1000日間のシミュレーションのヒストグラムを描くことで調べなさい。曇り、晴れについてはどうか。