2013年7月23日

育成プログラム（DSGEモデル入門）
第4回 DSGEモデルの応用

蓮見 亮

目次

1 ニューケインジアン・モデル（NKモデル）の復習 2

2 NKモデルの応用 6
2.1 硬直賃金モデル 6
2.2 Galí et al. [2011] の失業モデル 11

3 動的計画法とその応用 15
3.1 動的計画法入門（スライドは省略） 15
3.2 サーチ・マッチングモデルによる失業の内生化 15
3.3 モデルへの一般物価の導入 20

4 金融部門の導入（Gertler and Karadi [2011]） 24

5 OLGモデル 33
5.1 OLGモデルの概要 33
5.2 基本的なOLGモデル 33
5.3 OLGモデルでの物価の内生化 35

6 DSGEモデルに関するその他のトピック（箇条書き） 39

1　ニューケインジアン・モデル（NKモデル）の復習

家計

代表的家計の生涯効用関数をRBCモデルの効用関数と、独占的競争モデルの効用関数を組み合わせた

$$U_t = \sum_{i=0} \beta^i \left[\ln \left(C_{t+i} \right) - \mu L_{t+i}^{\gamma+1} \right], \quad C_t = \left[\int_0^1 c_{j,t}^{\frac{\eta-1}{\eta}} dj \right]^{\frac{\eta}{\eta-1}} \tag{1}$$

とする。代表的家計の最適化行動は、2段階に分かれる。家計は、第1段階で当期の消費C_tの大きさに依存することなく費用を最小化するように当期の消費に占める企業jの生産する$c_{j,t}$の割合を決め、第2段階で異時点の予算制約に基づき当期の消費C_tを決定する。
まず、第1段階での最適化により、一般物価P_tと財c_jに対するt期の需要$c_{j,t}$は、それぞれ

$$P_t = \left[\int_0^1 p_{j,t}^{1-\eta} dj \right]^{\frac{1}{1-\eta}} \tag{2}$$

$$c_{j,t} = \left(\frac{p_{j,t}}{P_t} \right)^{-\eta} C_t \tag{3}$$

と表される。
t期の予算制約は、

$$P_t C_t + B_t = W_t L_t + (1 + i_{t-1}) B_{t-1} + d_t \tag{4}$$

とすると、λ_t をラグランジュ乗数として、第2段階での最適化の一階条件

$$\frac{1}{C_t} - \lambda_t = 0 \tag{5}$$

$$\frac{W_t \lambda_t}{P_t} - \mu\left(\gamma + 1\right) L_t^{\gamma} = 0 \tag{6}$$

$$\frac{\beta\left(i_t + 1\right)\lambda_{t+1}}{P_{t+1}} - \frac{\lambda_t}{P_t} = 0 \tag{7}$$

が得られる。

企業

財 $c_{j,t}$ を生産する企業 j の生産関数を

$$c_{j,t} = A_t L_{j,t} \tag{8}$$

とする。生産1単位あたりの実質の平均費用は

$$\varphi_t = \frac{W_t}{A_t P_t} \tag{9}$$

である。

企業は独占的競争下では、他者と異なる財を生産するため価格を自由に決定できるが、毎期価格改定できるわけではなく、ある一定の確率で t 期に価格改定できるものとする（Calvo型価格設定モデル）価格改定できない確率を ω とする（つまり $1-\omega$ を価格改定できる確率とする）。企業は、もし当期に価格改定できるとすると、次に価格改定できるまでの利潤の割引現在価値を最大にするように当期の価格を決定すると

考えられる。次に価格改定できるまでの利潤のt期における割引現在価値は、当期の企業の販売価格を$p_{j,t}$とすると、以下の

$$\Theta_{j,t} = \sum_{i=0}^{\infty} \frac{\omega^i}{\prod_{k=1}^{i}(1+i_{t+k})} \left(p_{j,t} - P_{t+i}\varphi_{t+i}\right) c_{j,t+i} \tag{10}$$

を最大化することによって最大化される。$p_{j,t}$が販売価格、$P_{t+i}\varphi_{t+i}$が$t+1$期における名目の平均費用(9式を参照)、$c_{j,t+i}$が販売数量であるため、$(p_{j,t} - P_{t+i}\varphi_{t+i})c_{j,t+i}$は$t$期から$t+i$期まで企業が価格を改定できなかった場合の$t+i$期の利潤を表す。

10式の右辺を$p_{j,t}$で偏微分してゼロと等号で結ぶと、

$$(1+i_t)P_t C_t \sum_{i=0}^{\infty} \omega^i \beta^i \left[(1-\eta)\frac{p_{j,t}^{-\eta}}{P_{t+i}^{1-\eta}} + \eta\varphi_{t+i}\frac{p_{j,t}^{-\eta-1}}{P_{t+i}^{-\eta}}\right] = 0 \tag{11}$$

という一階の条件が得られる。11式は、漸化式に書き換えられる。

金融政策ほか

金融政策ルールは、テイラールール

$$i_t = i^* + \phi_\pi \pi_t + \phi_y \ln\left(\frac{C_t}{A_t C^*}\right) + v_t \tag{12}$$

に従うものとする。

金融政策ショックv_tは、技術水準A_tはAR(1)過程

$$v_{t+1} = \rho_v v_t + u_{t+1} \tag{13}$$

$$\ln\left(A_{t+1}\right) = \rho_A \ln\left(A_t\right) + \varepsilon_{t+1} \tag{14}$$

に従うものとする。

2　NKモデルの応用

使っているテクニックは

- ラグランジュの未定乗数法
- 一階の条件（FOC）を再帰的（recursive、漸化式）に書き書き換える

のみ。ただし、応用モデルでは

- 動的計画法の知識（包絡線定理など）

も使う。

2.1　硬直賃金モデル

オリジナルはErceg et al. [2000], プログラムは（StikyWage.mod）
代表的家計の生涯効用関数（NKモデルと同じ）

$$U_t = E_t \sum_{i=0} \beta^i \left[\ln(C_{t+i}) - \mu h_{j,t+i}^{\gamma+1} \right] \tag{15}$$

労働需要（NKモデルの財の需要関数と同じ）

$$h_{j,t} = \left(\frac{w_{j,t}}{W_t} \right)^{-\varphi} H_t \tag{16}$$

タイプj家計は、名目賃金$w_{j,t}$に関する価格決定力を持つが（独占的競争モデル）、名目賃金の改定機会は、一定の確率$1-\rho_w$で与えられると仮定する。

t 期の予算制約

$$P_t C_t + M_t + B_t = w_{j,i} h_{j,i} + M_{t-1} + (1 + i_{t-1}) B_{t-1} \tag{17}$$

ラグランジアン

$$\begin{aligned}\Lambda = \sum_{i=t} \beta^{i-t} \Bigg[& \ln(C_i) - \mu \{h_{j,t+i}(w_{j,i})\}^{\gamma+1} \\ & + \lambda_i \Big\{ w_{j,i} h_{j,i}(w_{j,i}) + M_{i-1} + (1 + i_{i-1}) B_{i-1} - P_i C_i - M_i - B_i \Big\} \Bigg]\end{aligned} \tag{18}$$

FOC

$$\frac{\partial \Lambda}{\partial C_t} = 0 : \ \ P_t \lambda_t - \frac{1}{C_t} = 0 \tag{19}$$

$$\frac{\partial \Lambda}{\partial B_t} = 0 : \ \ \beta(1 + i_t) \lambda_{t+1} - \lambda_t = 0 \tag{20}$$

$w_{j,t}$ については、

$$\begin{aligned}\Lambda' = \sum_{i=t} \beta^{i-t} \rho_w^{i-t} \Bigg[& \ln(C_i) - \mu \{h_{j,t+i}(w_{j,i})\}^{\gamma+1} \\ & + \lambda_i \Big\{ w_{j,i} h_{j,i}(w_{j,i}) + M_{i-1} + (1 + i_{i-1}) B_{i-1} - P_i C_i - M_i - B_i \Big\} \Bigg]\end{aligned} \tag{21}$$

$$\frac{\partial \Lambda'}{\partial w_{j,t}} = 0 : \ \ \sum_{i=t} \beta^{i-t} \rho_w^{i-t} \left[-\mu(\gamma + 1) h_{j,i}^{\gamma} \frac{\partial h_{j,i}}{\partial w_{j,i}} + \lambda_i h_{j,i} + \lambda_i w_{j,i} \frac{\partial h_{j,i}}{\partial w_{j,i}} \right] = 0 \tag{22}$$

が一階の条件になる

$\frac{\partial h_{j,t}}{\partial w_{j,t}} = -\varphi \left(\frac{w_{j,t}}{W_t}\right)^{-\varphi-1} \frac{H_t}{W_t}$ より

$$\begin{aligned} &\sum_{i=t} \beta^{i-t} \rho_w^{i-t} \Bigg[\mu(\gamma+1) \left\{ \left(\frac{w_{j,t}}{W_i}\right)^{-\gamma\varphi} H_i^{\gamma} \right\} \left\{ \varphi \left(\frac{w_{j,t}}{W_i}\right)^{-\varphi-1} \frac{H_i}{W_i} \right\} \\ &\qquad + (1-\varphi)\lambda_i \left(\frac{w_{j,t}}{W_i}\right)^{-\varphi} H_i \Bigg] = 0 \\ \Leftrightarrow\ &\sum_{i=t} \beta^{i-t} \rho_w^{i-t} \left[\mu(\gamma+1)\varphi w_{j,t}^{-\varphi-\gamma\varphi-1} W_i^{\varphi+\gamma\varphi} H_i^{\gamma+1} + (1-\varphi)\lambda_i w_{j,t}^{-\varphi} W_i^{\varphi} H_i \right] = 0 \\ \Leftrightarrow\ &\tilde{W}_t^{\gamma\varphi+1} = \frac{\mu(\gamma+1)\varphi}{\varphi-1} \frac{\sum_{i=t} \beta^{i-t} \rho_w^{i-t} W_i^{\varphi+\gamma\varphi} H_i^{\gamma+1}}{\sum_{i=t} \beta^{i-t} \rho_w^{i-t} \lambda_i W_i^{\varphi} H_i} = \frac{\mu(\gamma+1)\varphi}{\varphi-1} \frac{F_t}{Z_t} \end{aligned} \tag{23}$$

$$F_t = W_t^{\varphi+\gamma\varphi} H_t^{\gamma+1} + \beta\rho_w F_{t+1} \tag{24}$$

$$Z_t = \lambda_t W_t^{\varphi} H_t + \beta\rho_w Z_{t+1} \tag{25}$$

賃金

$$W_t = \left[(1-\rho_w)(\tilde{W}_t)^{1-\varphi} + \rho_w (W_{t-1})^{1-\varphi} \right]^{\frac{1}{1-\varphi}} \tag{26}$$

生産関数（以下、NKモデルと同じ）

$$C_t = A_t H_t \tag{27}$$

利潤最大化の一階条件

$$\frac{W_t}{P_t} = \xi_t A_t \tag{28}$$

技術水準A_tの過程

$$\ln(A_{t+1}) = \rho_A \ln(A_t) + \varepsilon_{t+1} \tag{29}$$

物価

$$\frac{1+\tilde{\pi}_t}{1+\pi_t} = \frac{\eta}{\eta-1}\frac{F_{\pi,t}}{Z_{\pi,t}} \tag{30}$$

$$F_{\pi,t} = \xi_t + \omega\beta(1+\pi_{t+1})^{\eta} F_{\pi,t+1} \tag{31}$$

$$Z_{\pi,t} = 1 + \omega\beta(1+\pi_{t+1})^{\eta-1} Z_{\pi,t+1} \tag{32}$$

$$(1+\pi_t)^{1-\eta} = (1-\omega)(1+\tilde{\pi}_t)^{1-\eta} + \omega \tag{33}$$

テイラールール

$$i_t = i^* + \phi_\pi \pi_t + \phi_y \ln\left(\frac{C_t}{A_t C^*}\right) \tag{34}$$

モデル方程式

内生変数(14) $C_t, H_t, A_t, w_t, \tilde{w}_t, f_t, z_t, i_t, \tilde{\lambda}_t, \pi_t, \tilde{\pi}_t, F_{\pi,t}, Z_{\pi,t}, \xi_t$

$$\tilde{\lambda}_t - \frac{1}{C_t} = 0 \tag{35}$$

$$\frac{\beta(1+i_t)\tilde{\lambda}_{t+1}}{1+\pi_{t+1}} - \tilde{\lambda}_t = 0 \tag{36}$$

$$\tilde{w}_t^{\gamma\varphi+1} = \frac{\mu(\gamma+1)\varphi}{\varphi-1}\frac{f_t}{z_t} \tag{37}$$

$$f_t = w_t^{\varphi+\gamma\varphi} H_t^{\gamma+1} + \beta\rho_w(1+\pi_{t+1})^{\varphi+\gamma\varphi} f_{t+1} \tag{38}$$

$$z_t = \tilde{\lambda}_t w_t^{\varphi} H_t + \beta\rho_w(1+\pi_{t+1})^{\varphi-1} z_{t+1} \tag{39}$$

$$(1+\pi_t)w_t = \left[(1-\rho_w)\{(1+\pi_t)\tilde{w}_t\}^{1-\varphi} + \rho_w(w_{t-1})^{1-\varphi}\right]^{\frac{1}{1-\varphi}} \tag{40}$$

$$C_t = A_t H_t \tag{41}$$

$$w_t = \xi_t A_t \tag{42}$$

$$\ln(A_{t+1}) = \rho_A \ln(A_t) + \varepsilon_{t+1} \tag{43}$$

$$\frac{1+\tilde{\pi}_t}{1+\pi_t} = \frac{\eta}{\eta-1}\frac{F_{\pi,t}}{Z_{\pi,t}} \tag{44}$$

$$F_{\pi,t} = \xi_t + \omega\beta(1+\pi_{t+1})^{\eta} F_{\pi,t+1} \tag{45}$$

$$Z_{\pi,t} = 1 + \omega\beta(1+\pi_{t+1})^{\eta-1} Z_{\pi,t+1} \tag{46}$$

$$(1+\pi_t)^{1-\eta} = (1-\omega)(1+\tilde{\pi}_t)^{1-\eta} + \omega \tag{47}$$

$$i_t = i^* + \phi_\pi \pi_t + \phi_y \ln\left(\frac{C_t}{A_t C^*}\right) \tag{48}$$

2.2 Galí et al. [2011] の失業モデル

オリジナルはGalí et al. [2011], プログラムは（Gali_SW.mod）

仮定

1. タイプiの家計の定義：労働から受ける不効用$u\left(j(\omega)\right)$がそれぞれ異なる家計から構成され、関数 $j(\omega)=\omega$の "密度関数" $p(\omega)$は$[0,1]$で一様とする。
2. 具体的に消費から受ける効用は$\log C(i)$、労働から受ける不効用は$\chi\{j(\omega)\}^{\phi}$と関数型を決める。労働供給しない場合の不効用はゼロ。
3. タイプiの家計の雇用量を$h(i)\in[0,1]$とすると、不効用の絶対値が小さい順に雇用される。
4. タイプiの家計の効用を積分すると、

$$\begin{aligned}\int_0^1[\log C(i)-\chi\{j(\omega)\}^{\phi}]p(\omega)d\omega &= \log C(i)-\int_{E_h}u\left(j(\omega)\right)p(\omega)d\omega \\ &= \log C(i)-\int_0^{h(i)}\chi j^{\phi}dj \\ &= \log C(i)-\chi\frac{h(i)^{1+\phi}}{1+\phi}.\end{aligned} \tag{49}$$

5. タイプiの家計はこの$U(C(i),h(i)):=\log C(i)-\chi\frac{h(i)^{1+\phi}}{1+\phi}$を最大化するように賃金交渉を行う（sticky wageモデル）。
6. 実質賃金$\frac{W}{P}$が所与のとき、

$$\frac{W}{P}\geq-\frac{U_H}{U_C} \tag{50}$$

が労働供給の必要条件なので、$\frac{W}{P}=-\frac{U_H}{U_C}$ を満たす H を L と定義し、失業率 u を

$$u=\log L-\log H \tag{51}$$

と定義する。

モデル

代表的家計の生涯効用関数

$$U_t=\sum_{i=0}\beta^i\left[\ln(C_{t+i})-\mu\Theta_t h_{j,t+i}^{\gamma+1}\right] \tag{52}$$

$$\Theta_t=\frac{Z_{\Theta,t}}{\bar{C}_t} \tag{53}$$

$$Z_{\Theta,t}=Z_{\Theta,t-1}^{1-v}\bar{C}_{t-1}^{v} \tag{54}$$

Θ_t は、失業率が下がるときに消費を増やすしかけ。

FOCはSticky Wageとほぼ同じ

$$\tilde{w}_t^{\gamma\varphi+1} = \frac{\mu(\gamma+1)\varphi}{\varphi-1}\frac{f_t}{z_t} \tag{55}$$

$$f_t = w_t^{\varphi+\gamma\varphi}\Theta_t H_t^{\gamma+1} + \beta\rho_w(1+\pi_{t+1})^{\varphi+\gamma\varphi} f_{t+1} \tag{56}$$

$$z_t = \tilde{\lambda}_t w_t^{\varphi} H_t + \beta\rho_w(1+\pi_{t+1})^{\varphi-1} z_{t+1} \tag{57}$$

$$(1+\pi_t)w_t = \left[(1-\rho_w)\{(1+\pi_t)\tilde{w}_t\}^{1-\varphi} + \rho_w(w_{t-1})^{1-\varphi}\right]^{\frac{1}{1-\varphi}} \tag{58}$$

$$\Theta_t = \frac{Z_{\Theta,t}}{C_t} \tag{59}$$

$$Z_{\Theta,t} = Z_{\Theta,t-1}^{1-v} C_{t-1}^{v} \tag{60}$$

（以下略、プログラム参照）

労働供給（潜在）、失業率

$$w_t = Z_{\Theta,t} L_t^{\gamma} \tag{61}$$

$$u_t = \ln(L_t) - \ln(H_t) \tag{62}$$

増えた変数は、$\Theta_t, Z_{\Theta,t}, L_t, u_t$

疑問

- なぜ $j(\omega)$ の分布を一様分布とするのか—おそらく単なる計算上の都合
- なぜ積分した効用を目的関数とするのか—“リスク・シェアリング理論” の妥当性の問題
- L の定義はこれでよいのか—失業率の定義そのものに対する懸念（$j(\omega)$ が1に近い人は、全く働かなくてすむ）

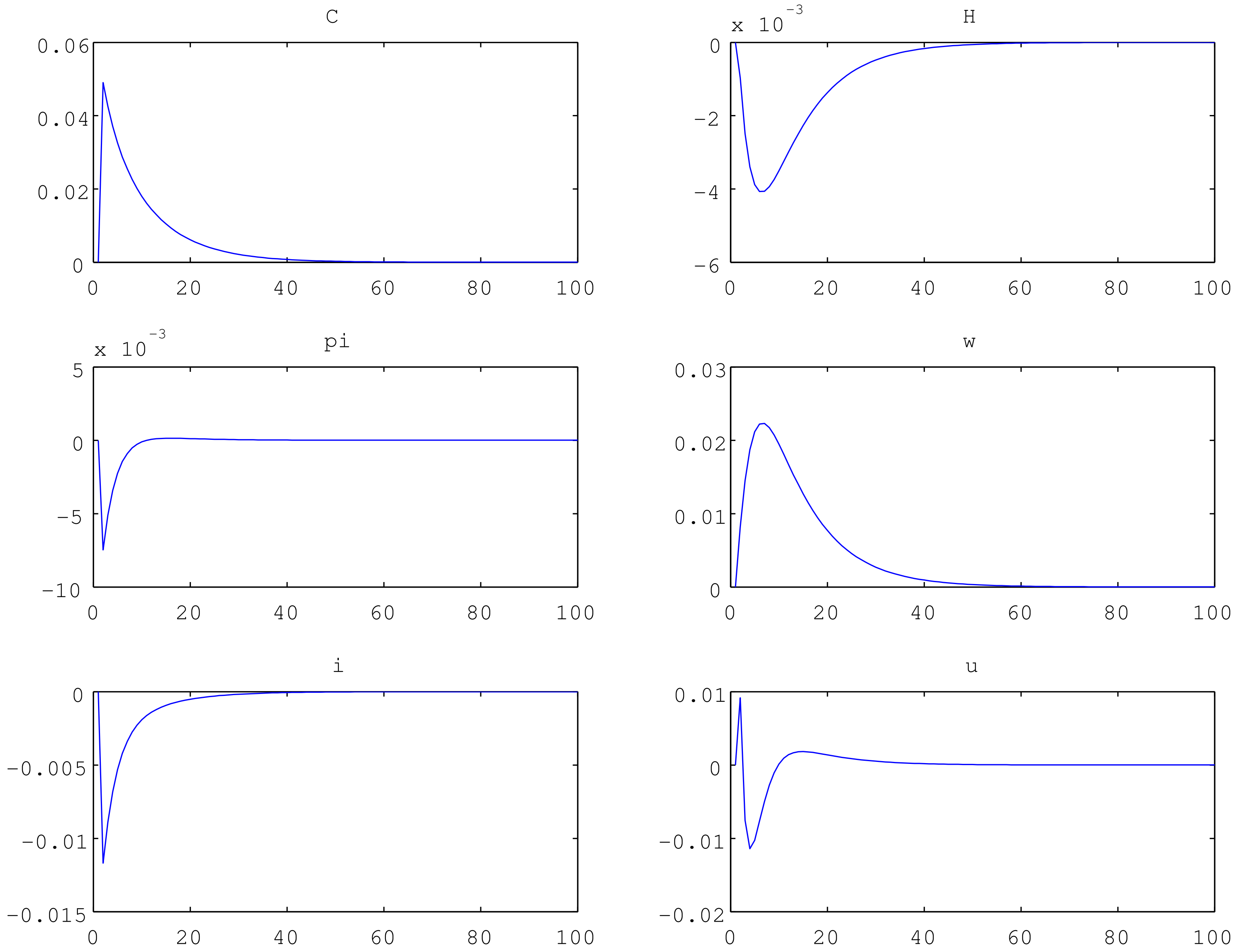

図1　5%の技術ショックに対するインパルス応答（Gali_SW.mod）

3　動的計画法とその応用

3.1　動的計画法入門（スライドは省略）

講義ノートの6章を参照。

3.2　サーチ・マッチングモデルによる失業の内生化

Shimer [2010] のモデル

l_t	producing workers	
v_t	recruters	
n_t	total workers	$n_t = l_t + v_t$
θ_t	recruters/unemployed	$\theta_t = v_t/(1-n_t)$
ν_t	recruters ratio	$\nu_t = v_t/(v_t + l_t) = v_t/n_t$

総労働力の遷移式

$$n_{t+1} = v_t\mu(\theta_t) + (1-\chi)n_t \tag{63}$$

$\mu(\cdot)$ は、recruter 1単位が見つける新たな雇用者の量（θ_t の減少関数）、$\chi \in (0,1)$ は離職率。
$f(\theta) := \theta_t\mu(\theta_t)$ と定義すると、

$$n_{t+1} = (1-\chi)n_t + f(\theta_t)(1-n_t) \tag{64}$$

とも書ける。

モデルのセットアップ

Shimer [2010] CH. 3.2のモデル

家計の効用最大化問題（a_t は貯蓄、τ は労働所得税率、T_t は政府からの移転、q_t は割引因子）

$$\sum_{i=0}\beta^i(\log c_{t+i}-\gamma n_{t+i}) \tag{65}$$

$$\text{s.t.}\quad a_{t+1}=[a_t+(1-\tau)w_t n_t+T_t-c_t]\frac{1}{q_t}, \tag{66}$$

$$n_{t+1}=(1-\chi)n_t+f(\theta_t)(1-n_t) \tag{67}$$

Value Function

$$V(a_t,n_t)=\max_{\boldsymbol{c}}\left[\log c_t-\gamma n_t+\beta V(a_{t+1},n_{t+1})\right] \tag{68}$$

FOC

$$\frac{1}{c_t}-\frac{\beta}{q_t}V_a(a_{t+1},n_{t+1})=0 \tag{69}$$

Envelope Theorem (1)

$$V_a(a_t,n_t)=\frac{\beta}{q_t}V_a(a_{t+1},n_{t+1}) \tag{70}$$

よりオイラー方程式、

$$\frac{1}{c_t}-\frac{\beta}{q_t c_{t+1}}=0 \tag{71}$$

Envelope Theorem (2)

$$V_n(a_t, n_t) = -\gamma + \beta(1 - \chi - f(\theta_t))V_n(a_{t+1}, n_{t+1}) + \frac{(1-\tau)w_t}{c_t} \tag{72}$$

生産関数

$$y_t = z_t k_t^\alpha \left\{n_t(1-\nu_t)\right\}^{1-\alpha} \tag{73}$$

企業の目的関数（i_t は粗投資）

$$J(n_t, k_t) = \max_{\boldsymbol{\nu}, \boldsymbol{i}} \sum_{i=0} \left[\left(\prod_{l=0} q_{t+l} \right) z_{t+i} k_{t+i}^\alpha \{n_{t+i}(1-\nu_{t+i})\}^{1-\alpha} - i_{t+i} - k_{t+i+1} - w_{t+i} n_{t+i} \right] \tag{74}$$

$$\text{s.t.} \quad n_{t+1} = n_t(\nu_t \mu(\theta) + 1 - \chi), \tag{75}$$

$$k_{t+1} = (1-\delta)k_t + i_t \tag{76}$$

企業のValue Function

$$J(n_t, k_t) = \max_{\boldsymbol{\nu}, \boldsymbol{i}} \left[z_t k_t^\alpha \{n_t(1-\nu_t)\}^{1-\alpha} - i_t - w_t n_t + q_t J(n_{t+1}, k_{t+1}) \right] \tag{77}$$

FOC(w.r.t ν_t)

$$(\alpha - 1) z_t k_t^\alpha n_t^{1-\alpha} (1-\nu_t)^{-\alpha} + q_t n_t \mu(\theta_t) J_n(n_{t+1}, k_{t+1}) = 0 \tag{78}$$

Envelope Theorem(w.r.t n_t)

$$J_n(n_t, k_t) = (1-\alpha) z_t k_t^\alpha n_t^{-\alpha} (1-\nu_t)^{1-\alpha} - w_t + q_t(\nu_t \mu(\theta_t) + 1 - \chi) J_n(n_{t+1}, k_{t+1}) \tag{79}$$

FOC+Envelope Theorem(w.r.t i_t, k_t)

$$1 = q_t \left[\alpha z_t \left\{ \frac{k_t}{n_t(1-\nu_t)} \right\}^{\alpha-1} + 1 - \delta \right] \tag{80}$$

離職率/雇用力ν_t

$$\nu_t = \frac{\chi}{\mu(\theta_t)} = \frac{\chi \theta_t}{f(\theta_t)} \tag{81}$$

技術水準

$$\ln(z_{t+1}) = \rho \ln(z_t) + \zeta \upsilon_{t+1} \tag{82}$$

税収

$$T_t = \tau w_t n_t \tag{83}$$

賃金の決定（ナッシュ積）

家計が労働供給を微少量増加させることによる生涯効用の限界的な増加量は、

$$\hat{V}(w, \varepsilon) := V(a_t, n_t + \varepsilon) \tag{84}$$

という関数を定義し、偏微分をとり$\varepsilon = 0$とおくことで、

$$\tilde{V}_n(w) := \hat{V}_{\varepsilon_t}(w, 0) = \frac{(1-\tau)(w - w_t)}{c_t} + V_n(a_{t+1}, n_{t+1}) \tag{85}$$

と賃金水準wの関数として表される。

一方で、企業が労働投入を微少量増加させることによる企業価値の割引現在価値の限界的な増加量は、

$$\hat{J}(w,\varepsilon) := J(n_t+\varepsilon, k_t) \tag{86}$$

という関数を定義し、偏微分をとり$\varepsilon=0$とおくことで、

$$\tilde{J}_n(w) := \hat{J}_{\varepsilon_t}(w,0) = w - w_t + J_n(n_{t+1}, k_{t+1}) \tag{87}$$

と賃金水準wの関数として表される。
賃金は、家計と企業の交渉に基づき、以下の方程式により決まるとする。

$$w_t = \arg\max \tilde{V}_n(w)^{\phi}\tilde{J}_n(w)^{1-\phi} \tag{88}$$

右辺$\tilde{V}_n(w)^{\phi}\tilde{J}_n(w)^{1-\phi}$はナッシュ積で、$\phi$は家計と企業の交渉力を表すパラメータである。
最適化の必要十分条件、および均衡では$w=w_t$であることより、

$$\left.\frac{\partial \log\left(\tilde{V}_n(w)^{\phi}\tilde{J}_n(w)^{(1-\phi)}\right)}{\partial w}\right|_{w=w_t} = 0 \tag{89}$$

整理すると、

$$(1-\phi)V_n(a_t,n_t)c_t = \phi(1-\tau)J_n(n_t,k_t) \tag{90}$$

72式に代入して$V_n(a_t,n_t)$を消去して、さらに、78, 79式を用いてJ_nを消去すると、

$$(1-\tau)w_t = \phi(1-\tau)(1-\alpha)z_t\left\{\frac{k_t}{n_t(1-\nu_t)}\right\}^{\alpha}(1+\theta_t) + (1-\phi)\gamma c_t \tag{91}$$

モデルの全体

内生変数は、$c_t, q_t, y_t, k_t, z_t, \nu_t, w_t, n_t, \theta_t, T_t$ の10個
モデル式は、66,67,71,73,74,80,81,82,83,91
f の関数形は、$f(\theta) = \bar{f}\sqrt{\theta}$ とする。

3.3 モデルへの一般物価の導入

プログラムはNK_unemp.mod
費用最小化問題($r_t = 1/q_t - 1 + \delta$)

$$\min \quad r_t k_t + w_t n_t(1-\nu_t) + \varphi_t(y_t - z_t k_t^{\alpha}\{n_t(1-\nu_t)^{1-\alpha}\}) \tag{92}$$

資本ストックのFOC

$$r_t = 1/q_t - 1 + \delta = \varphi_t \alpha z_t \left\{\frac{k_t}{n_t(1-\nu_t)}\right\}^{\alpha-1} \tag{93}$$

mc($:= \tilde{\varphi}_t$)

$$\tilde{\varphi}_t = \frac{r_t k_t + w_t n_t(1-\nu_t)}{y_t} = \frac{\varphi_t \alpha z_t \left\{\frac{k_t}{n_t(1-\nu_t)}\right\}^{\alpha-1} k_t + w_t n_t(1-\nu_t)}{y_t} \tag{94}$$

物価

$$\frac{1+\tilde{\pi}_t}{1+\pi_t} = \frac{\eta}{\eta-1}\frac{F_t}{Z_t} \tag{95}$$

$$F_t = \tilde{\varphi}_t + \omega\beta(1+\pi_{t+1})^{\eta}F_{t+1} \tag{96}$$

$$Z_t = 1 + \omega\beta(1+\pi_{t+1})^{\eta-1}Z_{t+1} \tag{97}$$

$$(1+\pi_t)^{1-\eta} = (1-\omega)(1+\tilde{\pi}_t)^{1-\eta} + \omega \tag{98}$$

テイラールール

$$i_t = i^* + \phi_\pi \pi_t + \phi_y \ln\left(\frac{y_t}{z_t y^*}\right) \tag{99}$$

Fischer Equation

$$\frac{1}{q_{t+1}} = 1 + i_t - \pi_{t+1} \tag{100}$$

他は基本モデルと同じ。

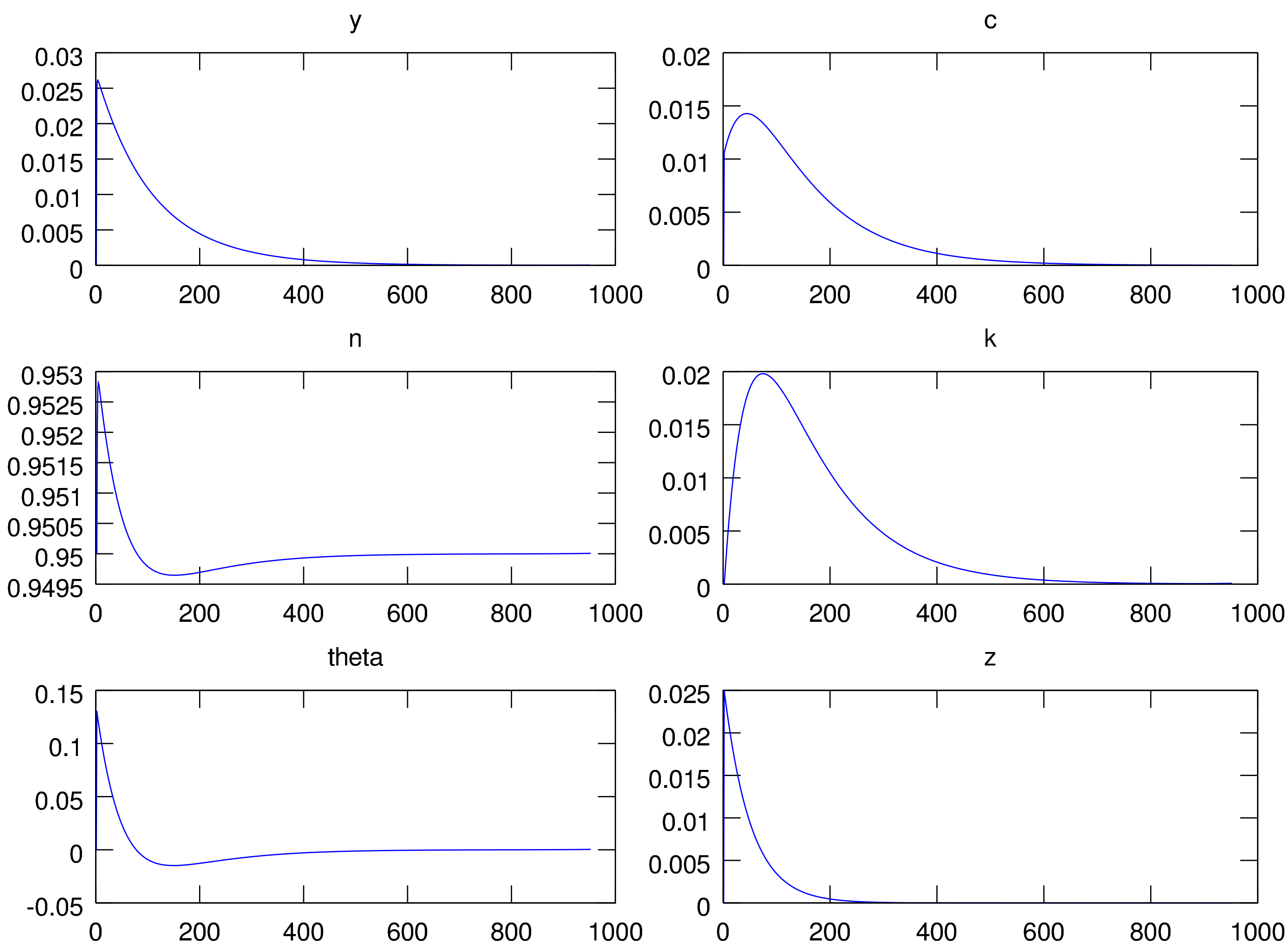

図2　2.5％の技術ショックに対するインパルス応答（NK_unemp.mod）

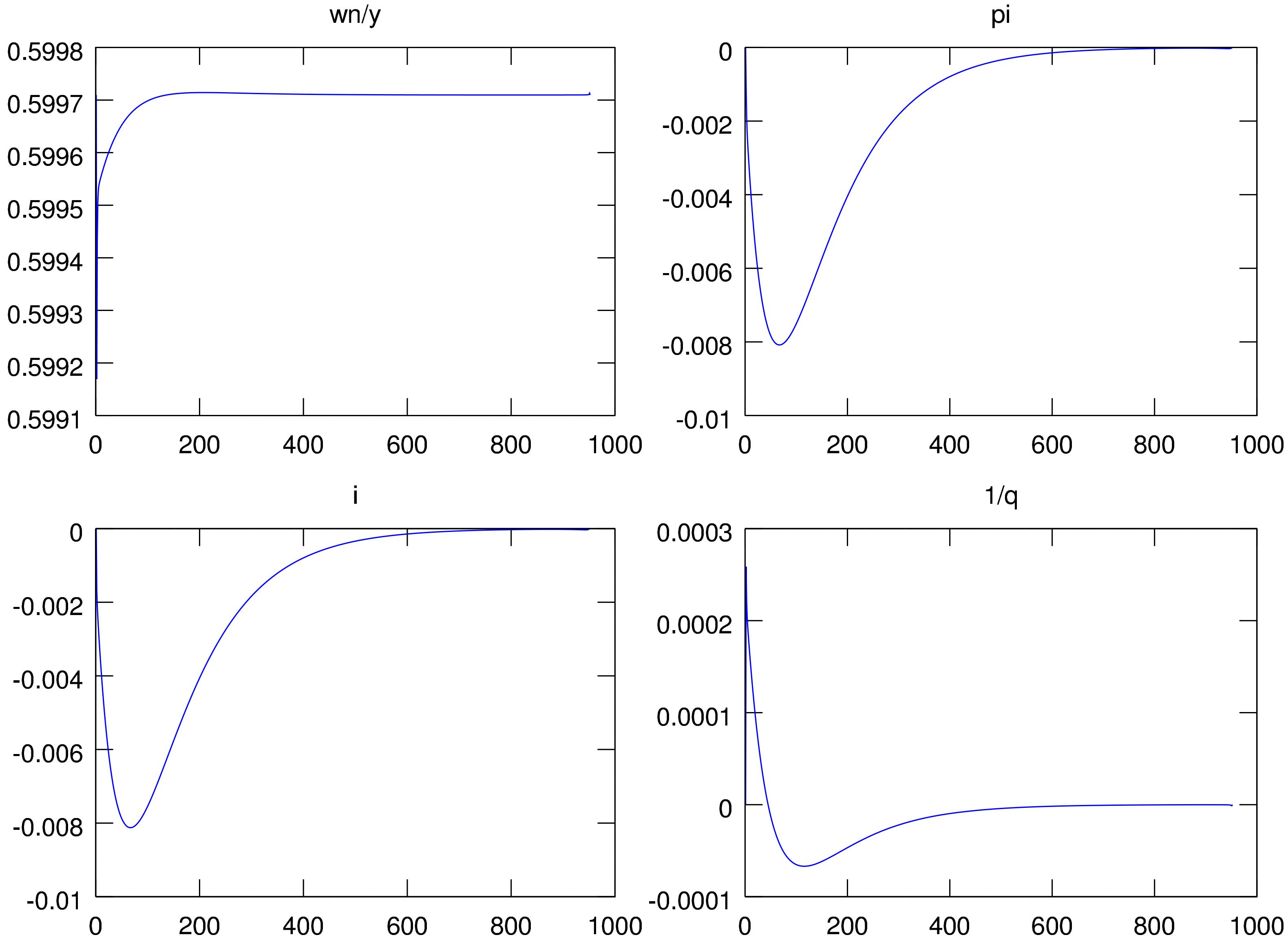

図3　同・2.5％の技術ショックに対するインパルス応答（NK_unemp.mod）

4　金融部門の導入（Gertler and Karadi [2011]）

ほぼオリジナルだが、やや簡略化している。

家計

代表的家計の生涯効用関数を

$$U_t = \sum_{i=0} \beta^i \left[\ln\left(C_{t+i}\right) - \mu L_{t+i}^{\varphi+1} \right] \tag{101}$$

とする。t 期の予算制約は、

$$C_t + B_{t+1} = W_t L_t + R_t B_t + d_t \tag{102}$$

とすると、λ_t をラグランジュ乗数として、第２段階での最適化の一階条件

$$\frac{1}{C_t} - \lambda_t = 0 \tag{103}$$

$$W_t \lambda_t - \mu\left(\varphi+1\right) L_t^{\varphi} = 0 \tag{104}$$

$$\beta R_t \lambda_{t+1} - \lambda_t = 0 \tag{105}$$

が得られる。後で用いるので、確率的割引因子

$$\Lambda_{t,t+i} = \frac{\lambda_{t+i}}{\lambda_t} \tag{106}$$

を定義しておく。

金融仲介機関

Q_tを資本財の相対価格、$S_{j,t}$を貸出債権の量、$N_{j,t}$を銀行の純資産、$B_{j,t}$を預金量とすると、

$$Q_t S_{j,t} = N_{j,t} + B_{j,t+1} \tag{107}$$

つまり、総資産＝負債（預金）＋純資産
来期まで生存する銀行の純資産は、

$$\begin{aligned} N_{j,t+1} &= R_{k,t+1} Q_t S_{j,t} - R_{t+1} B_{j,t+1} \\ &= (R_{k,t+1} - R_{t+1}) Q_t S_{j,t} + R_{t+1} N_{j,t} \end{aligned} \tag{108}$$

で推移する。
θを銀行の生存確率とすると、銀行は精算価値の期待値

$$\begin{aligned} V_{j,t} &= \sum_{i=0}^{\infty} (1-\theta)\theta^i \beta^{i+1} \Lambda_{t,t+1+i} N_{j,t+1+i} \\ &= \sum_{i=0}^{\infty} (1-\theta)\theta^i \beta^{i+1} \Lambda_{t,t+1+i} N_{j,t+1+i} [(R_{k,t+1+i} - R_{t+1+i}) Q_{t+i} S_{j,t+i} + R_{t+1+i} N_{j,t+i}] \\ &= (1-\theta)\beta \Lambda_{t,t+1} [(R_{k,t+1} - R_{t+1}) Q_t S_{j,t} + R_{t+1} N_{j,t}] + \theta\beta\Lambda_{t,t+1} V_{j,t+1} \end{aligned} \tag{109}$$

を最大化しようとする（$\sum_{i=0}^{\infty}(1-\theta)\theta^i = 1$であることに注意）。
ここで、ある$\lambda \in (0,\ 1)$に対して$\text{精算価値} < \lambda \times \text{総資産}$のときには、モラルハザードが起こる、すなわち、銀行は$\lambda \times \text{総資産}$を持ち逃げできると仮定する。つまり、家計が銀行に預金するためには$\text{精算価値} \geq \lambda \times \text{総資産}$でなければならず、式で書くと

$$V_{j,t} \geq \lambda Q_t S_{j,t} \tag{110}$$

でなければならない。
左辺の$V_{j,t}$は、108, 109式より

$$V_{j,t} = \nu_t Q_t S_{j,t} + \eta_t N_{j,t} \tag{111}$$

$$\nu_t = (1-\theta)\beta\Lambda_{t,t+1}(R_{k,t+1} - R_{t+1}) + \theta\beta\Lambda_{t,t+1} x_{t,t+1} \nu_{t+1} \tag{112}$$

$$\eta_t = (1-\theta) + \theta\beta\Lambda_{t,t+1} z_{t,t+1} \eta_{t+1} \tag{113}$$

$$z_{t,t+1} = \frac{N_{j,t+1}}{N_{j,t}} \tag{114}$$

$$x_{t,t+1} = \frac{Q_{j,t+1} S_{j,t+1}}{Q_{j,t} S_{j,t}} \tag{115}$$

と漸化式で書き換えられる。
レバレッジϕ_tは

$$\phi_t = \frac{Q_t S_{j,t}}{N_{j,t}} \tag{116}$$

$$\tag{117}$$

で定義できるが、110式の不等式がバインドするとき、

$$\phi_t = \frac{\eta_t}{\lambda - \nu_t} \tag{118}$$

とも書ける。

銀行の生存確率θは1より小さいためそのままだとマクロの銀行の純資産はゼロになるので、家計から$N_{n,t+1}=\omega Q_t S_t$という新たな出資が起こるものとする。したがって、マクロの銀行の純資産の遷移式は、

$$\begin{aligned} N_{t+1} &= \theta \int N_{j,t+1} dj + N_{n,t+1} \\ &= \theta[(R_{k,t+1} - R_{t+1})\phi_t + R_{t+1}]N_t + \omega Q_t S_t \end{aligned} \tag{119}$$

で与えられる。
$x_{t,t+1}, z_{t,t+1}$は

$$z_{t,t+1} = \frac{N_{j,t+1}}{N_{j,t}} = (R_{k,t+1} - R_{t+1})\phi_t + R_{t+1} \tag{120}$$

$$x_{t,t+1} = \frac{\phi_{t+1}}{\phi_t} z_{t,t+1} \tag{121}$$

と書ける。

中間財生産企業

生産資産と銀行の総資産は

$$Q_t K_{t+1} = Q_t \int S_{j,t} dj = Q_t S_t \tag{122}$$

の関係にあるものとする。
中間財生産企業の生産関数は

$$Y_{m,t} = A_t (\xi_t K_t)^\alpha L_t^{1-\alpha} \tag{123}$$

とする（ξ_t は資本価値に対する外生ショック）。
販売価格を $P_{m,t}$ とすると、労働に関する利潤最大化条件は

$$P_{m,t}(1-\alpha)\frac{Y_t}{L_t} = W_t \tag{124}$$

で、投資収益率 $R_{k,t+1}$ は、

$$R_{k,t+1}Q_tK_{t+1} = P_{m,t+1}\alpha Y_{t+1} + (Q_{t+1}-\delta)\xi_{t+1}K_{t+1} \tag{125}$$

を満たす（δ は減耗率）。

資本財生産企業

資本財生産企業は、以下の目的関数

$$\sum_{\tau=t}^{\infty}\beta^{\tau-t}\Lambda_{t,\tau}\left[(Q_\tau-1)I_{n,\tau} - \frac{I_{n,\tau}+I_{ss}}{I_{n,\tau-1}+I_{ss}}(I_{n,\tau}+I_{ss})\right] \tag{126}$$

を最大化するように、純投資 $I_{n,t} = I_t - \delta\xi_tK_t$ を決定する。調整費用関数 f は

$$f(X) = \frac{\eta_i}{2}(X-1)^2 \tag{127}$$

とする。一階の条件は、

$$Q_t = 1 + f(X_t) + xf'(X_t) - \beta\Lambda_{t,t+1}{X_{t+1}}^2f'(X_{t+1}) \tag{128}$$

$$X_t = \frac{I_{n,t}+I_{ss}}{I_{n,t-1}+I_{ss}} \tag{129}$$

最終財

最終財Y_tの生産関数を

$$Y_t = \left[\int_0^1 Y_{j,t}^{\frac{\eta-1}{\eta}} dj\right]^{\frac{\eta}{\eta-1}} \tag{130}$$

とすると、一般物価P_tと卸売財Y_jに対するt期の需要$Y_{j,t}$は、それぞれ

$$P_t = \left[\int_0^1 p_{j,t}^{1-\eta} dj\right]^{\frac{1}{1-\eta}} \tag{131}$$

$$Y_{j,t} = \left(\frac{p_{j,t}}{P_t}\right)^{-\eta} Y_t \tag{132}$$

と表される。
最終財生産の限界費用は$P_{m,t}$で、Calvo型価格決定モデルの価格非改定確率をγとすると、

$$\frac{1+\tilde{\pi}_t}{1+\pi_t} = \frac{\eta}{\eta-1}\frac{F_{\pi,t}}{Z_{\pi,t}} \tag{133}$$

$$F_{\pi,t} = P_{m,t}Y_t + \beta\gamma\Lambda_{t,t+1}(1+\pi_{t+1})^{\eta}F_{\pi,t+1} \tag{134}$$

$$Z_{\pi,t} = Y_t + \beta\gamma\Lambda_{t,t+1}(1+\pi_{t+1})^{\eta-1}Z_{\pi,t+1} \tag{135}$$

$$(1+\pi_t)^{1-\eta} = (1-\gamma)(1+\tilde{\pi}_t)^{1-\eta} + \gamma \tag{136}$$

で物価の動学が決まる。

その他の式

市場精算条件、資本ストック

$$Y_t = C_t + I_t + f\left(\frac{I_{n,t} + I_{ss}}{I_{n,t-1} + I_{ss}}\right)(I_{n,t} + I_{ss}) \tag{137}$$

$$I_{n,t} = I_t - \delta \xi_t K_t \tag{138}$$

$$K_{t+1} = \xi_t K_t + I_{n,t} \tag{139}$$

金融政策ルールは、テイラールール

$$i_t = \rho_i i_{t-1} + (1-\rho_i)\left[i^* + \phi_\pi \pi_t + \phi_y \ln\left(\frac{Y_t}{A_t Y^*}\right)\right] \tag{140}$$

に従うものとする。
名目金利と実質金利は、フィッシャー方程式

$$i_t = R_{t+1} + \pi_{t+1} \tag{141}$$

で結ばれる。
状態変数の遷移式は

$$\ln(A_{t+1}) = \rho_A \ln(A_t) + \varepsilon_{t+1} \tag{142}$$

$$\ln(\xi_{t+1}) = \rho_\xi \ln(\xi_t) + \epsilon_{t+1} \tag{143}$$

とする。

モデルの全体

内生変数は、$C_t, L_t, W_t, R_t, \lambda_t, \Lambda_{t,t+1}, Q_t, S_t, N_t, z_{t,t+1}, x_{t,t+1}, R_{k,t}, \nu_t, \eta_t, \phi_t, Y_t, A_t, K_t, \xi_t,$
$P_{m,t}, I_t, I_{n,t}, i_t, \pi_t, \tilde{\pi}_t, F_{\pi,t}, Z_{\pi,t}$ の28個[*1]、
モデル式は103,104,105,106,112,113,116,118,119,120,121,122,123,124,
125,128,133,134,135,136,137,138,139,140,141,142,143、
プログラムは、gkmodel.mod

補足

金融部門を内生化した他の有名なモデルとして、Bernanke et al. [1999]（いわゆるBGG論文、フィナンシャル・アクセラレータモデル）がある。

[*1] 一次近似のレベルでは、$Y_{m,t} = Y_t$ と考えてよい

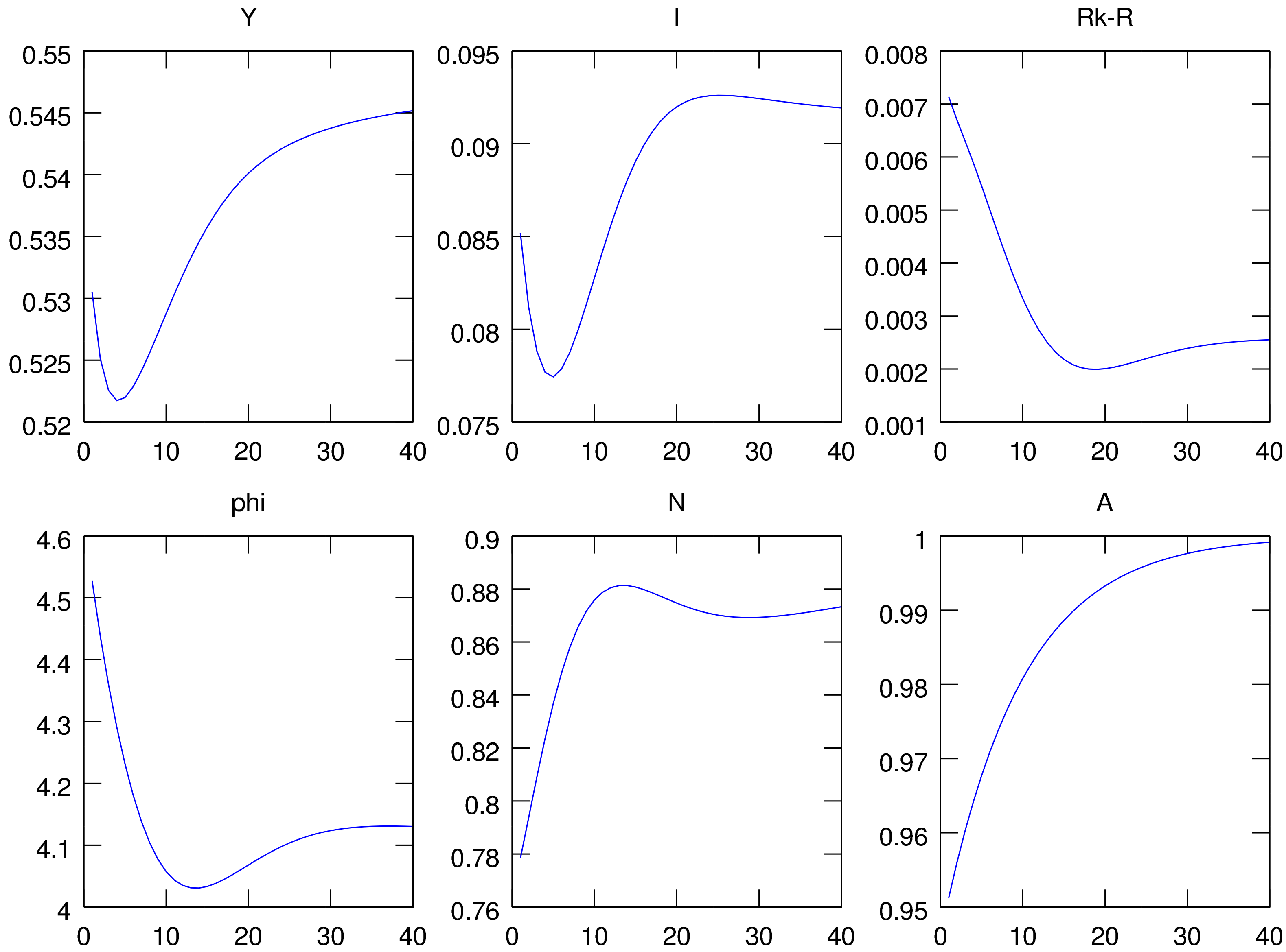

図４　-５％の技術ショックに対するインパルス応答（gkmodel.mod）

5　OLGモデル

5.1　OLGモデルの概要

OLGモデルは1、

- 家計の生存期間が有限なだけで、代表的家計モデルと構造的に大きな違いはない。
- DSGEモデルでは対応が難しいような人口構造変化に関係する問題（社会保障など）の答えが出せる。
- パレート最適にはなっていないので、解釈には注意が必要。政府の介入の余地あり。
- （DSGEモデルほど）実証向きではない。

5.2　基本的なOLGモデル

プログラムは、olg1.mod
$c_{t,a}$ はt期における a 歳（$a \in [1,\ I]$）のコホート消費という意味。他も同様。
効用関数

$$\max \quad U_{\mathrm{birth}=t} = \sum_{i=1}^{I} \beta^{i-1} \ln(c_{t+i-1,i}) + \mu \sum_{i=1}^{R} \beta^{i-1} l_{t+i-1,i}^{\gamma+1} \tag{144}$$

予算制約

$$k_{t,1} = 0 \tag{145}$$

$$k_{t+1,a+1} = (1 + r_t - \delta) k_{t,a} + w_t l_{t,a} - c_{t,a}, \quad a \in [1,\ R] \tag{146}$$

$$k_{t+1,a+1} = (1 + r_t - \delta) k_{t,a} - c_{t,a}, \quad a \in [R+1,\ I] \tag{147}$$

FOC

$$c_{t,a}^{-1} - \lambda_{t,a} = 0, \quad a \in [1,\ I] \tag{148}$$

$$w_t \lambda_{t,a} - (\gamma + 1)\, \mu l_{t,a}^{\gamma} = 0, \quad a \in [1,\ R] \tag{149}$$

$$\beta\, (1 + r_{t+1} - \delta)\, \lambda_{t+1,a+1} - \lambda_{t,a} = 0, \quad a \in [1,\ I-1] \tag{150}$$

$$c_{t,I} = (1 + r_t - \delta) k_{t,I} \tag{151}$$

マクロ集計

$$C_t = \sum_{a=1}^{I} c_{t,a} \tag{152}$$

$$L_t = \sum_{a=1}^{R} l_{t,a} \tag{153}$$

$$K_t = \sum_{a=1}^{I} k_{t,a} \tag{154}$$

生産関数

$$Y_t = A_t K_t^{\alpha} L_t^{1-\alpha} \tag{155}$$

$$\ln(A_{t+1}) = \rho \ln(A_t) + e_{t+1} \tag{156}$$

金利、賃金

$$r_t = \alpha A_t K_t^{\alpha-1} L_t^{1-\alpha} \tag{157}$$

$$w_t = (1-\alpha) A_t K_t^{\alpha} L_t^{-\alpha} \tag{158}$$

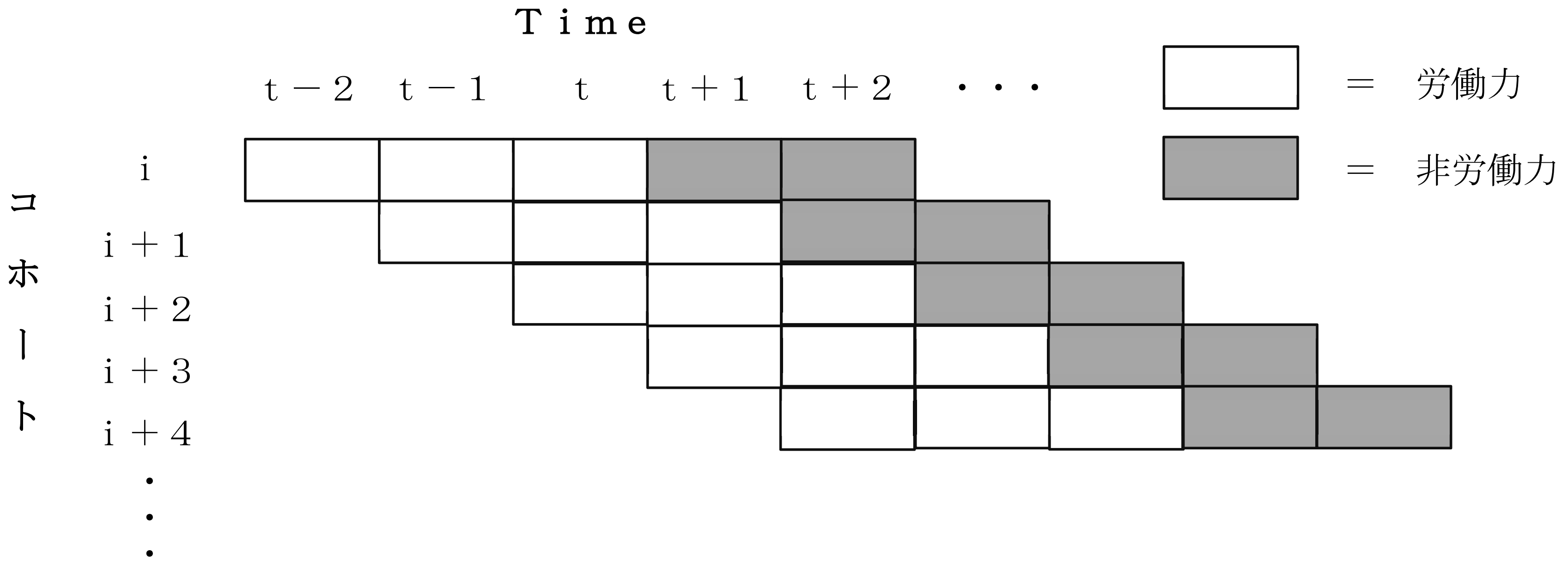

図5　OLGモデルにおける労働力（$I=5$, $R=3$の場合）

5.3　OLGモデルでの物価の内生化

プログラムは、olg2.mod
NKモデルの以下の5つの式を付け加えるのと、r_t と w_t をラグランジュ乗数を使って書き直すだけでよい。
Calvo型硬直価格モデル

$$\frac{1+\tilde{\pi}_t}{1+\pi_t} = \frac{\theta}{\theta-1}\frac{F_t}{Z_t} \tag{159}$$

$$F_t = \varphi_t + \omega\beta(1+\pi_{t+1})^{\theta}F_{t+1} \tag{160}$$

$$Z_t = 1 + \omega\beta(1+\pi_{t+1})^{\theta-1}Z_{t+1} \tag{161}$$

$$(1+\pi_t)^{1-\theta} = (1-\omega)(1+\tilde{\pi}_t)^{1-\theta} + \omega \tag{162}$$

テイラールール

$$i_t = i^* + \phi_\pi \pi_t + \phi_y \ln\left(\frac{Y_t}{A_t Y^*}\right) \tag{163}$$

金利、賃金

$$r_t = \varphi_t \alpha A_t K_t^{\alpha-1} L_t^{1-\alpha} \tag{164}$$

$$w_t = \varphi_t (1-\alpha) A_t K_t^{\alpha} L_t^{-\alpha} \tag{165}$$

詳細についてはプログラムを参照。

OLGモデルの拡張の可能性

1. 人口構造を明示的に入れる
2. 年金（賦課方式）制度の導入

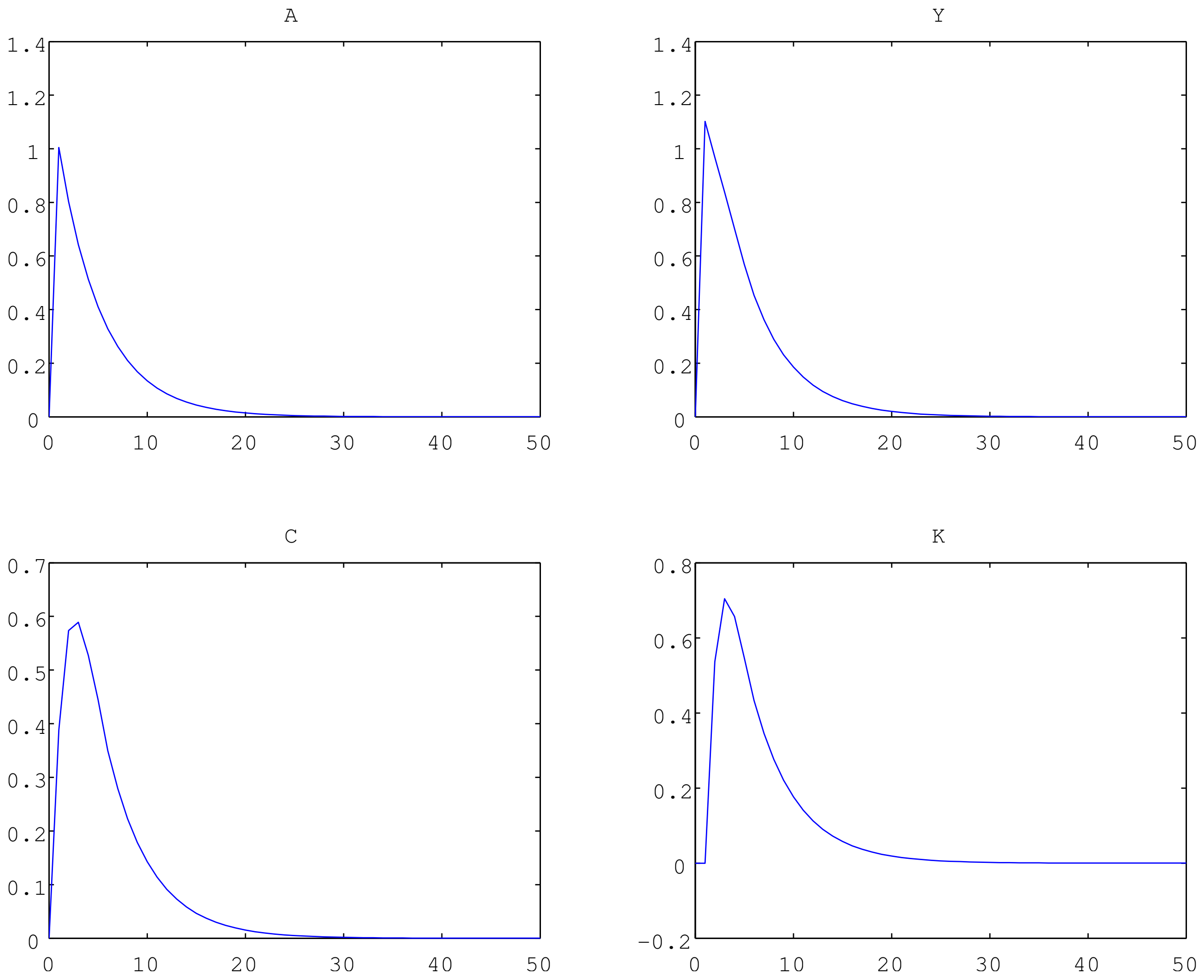

図6　1%の技術ショックに対するインパルス応答（定常均衡値からの乖離率（r_t は乖離幅)、単位%)、(olg2.mod)

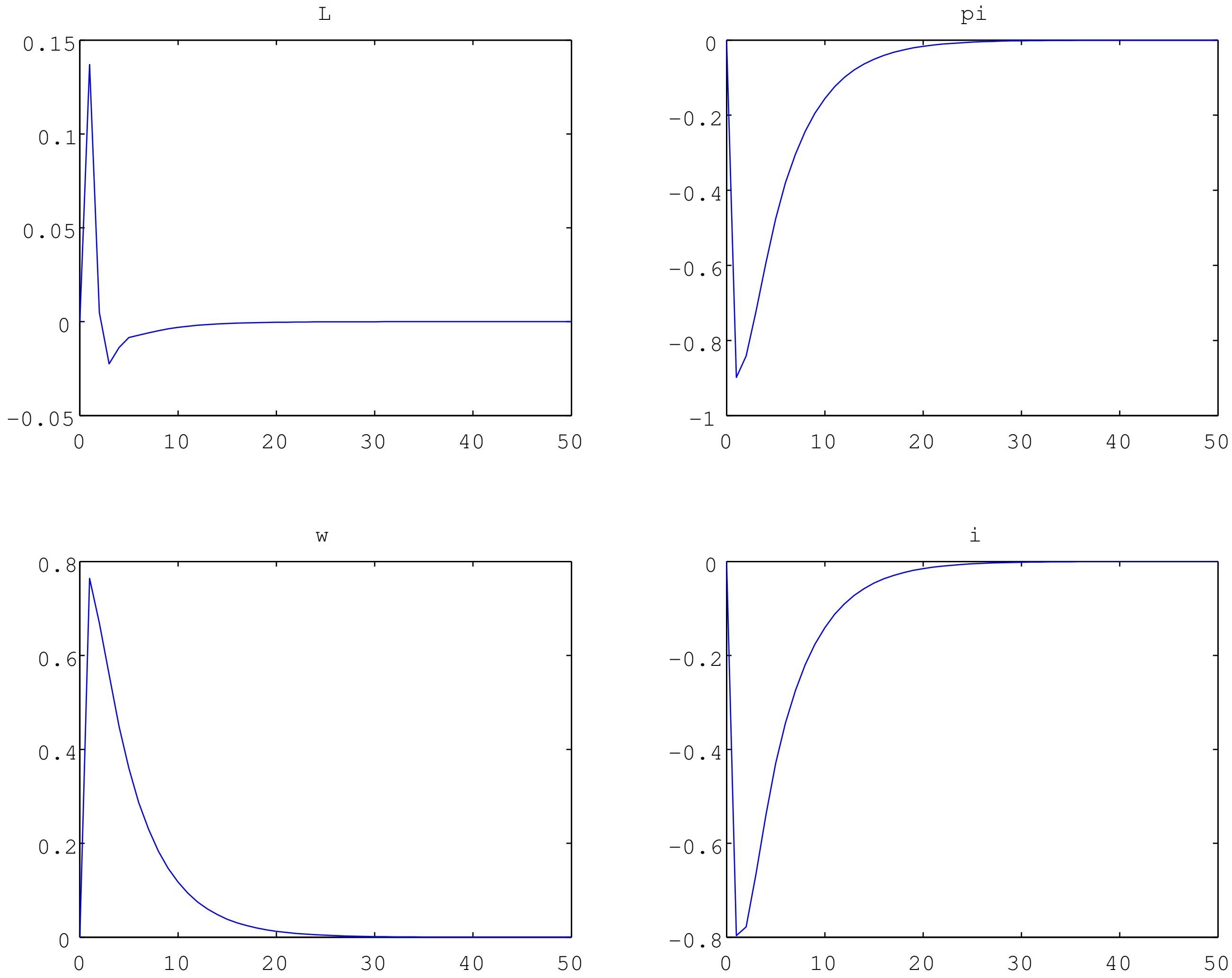

図7　同・1％の技術ショックに対するインパルス応答（定常均衡値からの乖離率、単位％）、（olg2.mod）

6　DSGEモデルに関するその他のトピック（箇条書き）

1. トレンドの内生化（HP フィルタによるデトレンドが不要に）
2. 政府の内生化と財政乗数
3. 小国開放経済モデル
4. 多国モデル（GIMF タイプ）
5. 複数部門モデル（同）

参考文献

Bernanke, B., M. Gertler, and S. Gilchrist (1999) "The Financial Accelerator in a Quantitative Business Cycle Framework," *Handbook of Macroeconomics*, Vol. 1, pp. 1341–1393.

Erceg, C. J., D. W. Henderson, and A. T. Levin (2000) "Optimal Monetary Policy with Staggered Wage and Price Contracts," *Journal of Monetary Economics*, Vol. 46, No. 2, pp. 281–313.

Galí, J., F. Smets, and R. Wouters (2011) "Unemployment in an Estimated New Keynesian Model," *NBER Macroeconomics Annual*, Vol. 26, pp. 329–360.

Gertler, M. and P. Karadi (2011) "A Model of Unconventional Monetary Policy," *Journal of Monetary Economics*, Vol. 58, No. 1, pp. 17–34.

Shimer, R. (2010) *Labor Markets and Business Cycles*: Princeton University Press.